



Learning Trajectory In Mathematics Education for Geometry Topic

Ika Muji Wahyuni¹, Mardiyana², Yuli Bangun Nursanti³, Farida Nurhasanah⁴

¹Program Studi S-2 Pendidikan Matematika, Universitas Sebelas Maret, Jalan Ir. Sutami 36 Ketingan, Jebres, Surakarta, Jawa Tengah, Indonesia 57126.

E-mail:¹ikamuji.imuj@student.uns.ac.id*, ²mardiyana@staff.uns.ac.id*,

³yulibangunnursanti@staff.uns.ac.id, ⁴faridanurhasanah@staff.uns.ac.id

Article received : March 24, 2025

Article revised : May 16, 2025,

Article Accepted: May 18, 2025.

* Corresponding author

Abstract: This study aims to examine learning trajectories in mathematics education, particularly in geometry topics, using the Systematic Literature Review (SLR) method combined with bibliometric analysis through the Vosviewer tool. Learning trajectory is a strategic approach that maps out progressive learning steps to achieve better conceptual understanding. Geometry was chosen due to its abstract nature, which requires visual representation to facilitate students' comprehension. The SLR method was employed to analyze research trends, underlying theories, and the implementation of learning trajectories in geometry learning. Data were collected from journal articles indexed in databases such as Google Scholar, Scopus, and Web of Science. Vosviewer was used to visualize relationships among concepts, keywords, and frequently discussed main topics. The analysis results indicate that learning trajectories play a crucial role in supporting geometry understanding through visualization-based approaches, object manipulation, and collaborative discussions. The findings also identify three main themes: (1) problem-based learning trajectory design, (2) the integration of technology in geometry learning, and (3) the role of formative assessment in validating the learning process. The study concludes that carefully designed learning trajectories can enhance the effectiveness of geometry learning. This research is expected to contribute to educators and researchers in improving the quality of mathematics learning through a more structured and data-driven approach. Specifically, this study presents a mapping of three main themes that can be used as a reference for the development of curriculum and teaching modules based on learning trajectory in secondary school geometry.

Keywords: learning trajectory; education; mathematics; geometry

Learning Trajectory dalam Pembelajaran Matematika Materi Geometri

Abstrak: Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji *learning trajectory* dalam pembelajaran matematika, khususnya pada materi geometri, menggunakan metode *Systematic Literature Review* (SLR) dengan analisis bibliometrik melalui perangkat Vosviewer. *Learning trajectory* merupakan pendekatan strategis yang memetakan langkah-langkah pembelajaran secara progresif untuk mencapai pemahaman konseptual yang lebih baik. Materi geometri dipilih karena sifatnya abstrak dan memerlukan representasi visual untuk memfasilitasi pemahaman peserta didik. Metode SLR digunakan untuk menganalisis tren penelitian, teori yang mendasari, serta implementasi *learning trajectory* pada pembelajaran geometri. Data diambil dari artikel jurnal terindeks dalam database seperti Google Scholar, Scopus, dan Web of Science. Analisis dengan Vosviewer digunakan untuk memvisualisasikan hubungan antara konsep, kata kunci, dan topik utama yang sering muncul. Hasil analisis menunjukkan bahwa *learning trajectory* berperan penting dalam mendukung pemahaman geometri melalui pendekatan berbasis visualisasi, manipulasi objek, dan diskusi kolaboratif. Temuan juga mengidentifikasi tiga tema utama: (1) desain *learning trajectory* berbasis masalah (problem-based learning), (2) pengintegrasian teknologi dalam pembelajaran geometri, dan (3) peran asesmen formatif dalam memvalidasi proses pembelajaran. Kesimpulan dari penelitian ini menegaskan bahwa penggunaan *learning trajectory* yang dirancang dengan cermat dapat meningkatkan efektivitas pembelajaran geometri. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi bagi pendidik dan peneliti untuk meningkatkan kualitas pembelajaran matematika melalui pendekatan yang lebih terstruktur dan berbasis data. Secara spesifik, penelitian ini menyajikan pemetaan

tiga tema utama yang dapat dijadikan rujukan bagi pengembangan kurikulum dan modul ajar berbasis learning trajectory dalam geometri sekolah menengah.

Kata Kunci: *learning trajectory*; pembelajaran; matematika; geometri

PENDAHULUAN

Pembelajaran matematika, khususnya pada materi geometri, sering kali menghadapi tantangan terkait pemahaman peserta didik. Geometri, sebagai salah satu cabang matematika, memerlukan kemampuan berpikir spasial, visualisasi, serta keterampilan dalam memanipulasi konsep abstrak. Geometri merupakan salah satu ruang lingkup matematika yang penting untuk dipelajari (Nursyahidah et al., 2020). Kendala utama yang sering ditemui di kelas adalah kurangnya pendekatan yang terstruktur dalam merancang langkah-langkah pembelajaran yang dapat mengakomodasi kebutuhan peserta didik dengan tingkat pemahaman yang berbeda. Dalam konteks ini, *learning trajectory* menjadi salah satu pendekatan yang relevan untuk diterapkan. Sehingga estimasi kehilangan pembelajaran sedikit lebih besar untuk matematika (Schult et al., 2022).

Learning trajectory merupakan bagian dari siklus pengajaran matematika yang menghubungkan penilaian pengetahuan siswa, pengetahuan guru, dan *learning trajectory* (Mousoulides & Sriraman, 2020). *Learning trajectory* merujuk pada serangkaian langkah pembelajaran yang dirancang secara bertahap dan terorganisasi untuk membantu peserta didik membangun pemahaman konseptual. Pendekatan ini melibatkan identifikasi tujuan pembelajaran, pemilihan aktivitas yang sesuai, dan asesmen untuk memastikan ketercapaian setiap langkah. Dalam materi geometri, *learning trajectory* dapat digunakan untuk membantu peserta didik memahami konsep dasar seperti bentuk, ukuran, hingga sifat-sifat bangun datar dan ruang secara progresif. Hasil penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa penggunaan *learning trajectory* dapat membantu siswa menemukan konsep teorema *phitagoras* (Towe & Julie, 2020).

Konsep *learning trajectory* pertama kali diperkenalkan oleh Simon (1995) dalam konteks pengajaran matematika sebagai *hypothetical learning trajectory* (HLT), yang menggambarkan dugaan perkembangan belajar siswa dari aktivitas pembelajaran yang dirancang. Sejak itu, konsep ini terus berkembang menjadi alat penting dalam desain instruksional, khususnya di bidang pendidikan matematika (Clements & Sarama, 2004; Gravemeijer & Cobb, 2006). Urgensi pengembangan *learning trajectory* dalam pembelajaran matematika terletak pada kemampuannya untuk menyediakan panduan yang terstruktur bagi guru dalam merancang aktivitas pembelajaran yang relevan dan efektif, serta untuk memprediksi kesulitan yang mungkin dihadapi siswa dan merancang intervensi yang tepat (Simon, 1995). Dalam konteks pembelajaran geometri, *learning trajectory* menjadi sangat penting karena sifat materi yang seringkali abstrak dan memerlukan visualisasi serta manipulasi objek untuk membangun pemahaman yang kuat (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Dengan tahapan ini, guru dapat mengantisipasi cara siswa berpikir dan merancang intervensi yang sesuai pada tiap tahap perkembangan pemahaman.

Seiring meningkatnya jumlah penelitian terkait *learning trajectory*, diperlukan kajian sistematis untuk mengidentifikasi arah dan celah penelitian yang masih terbuka. Penelitian

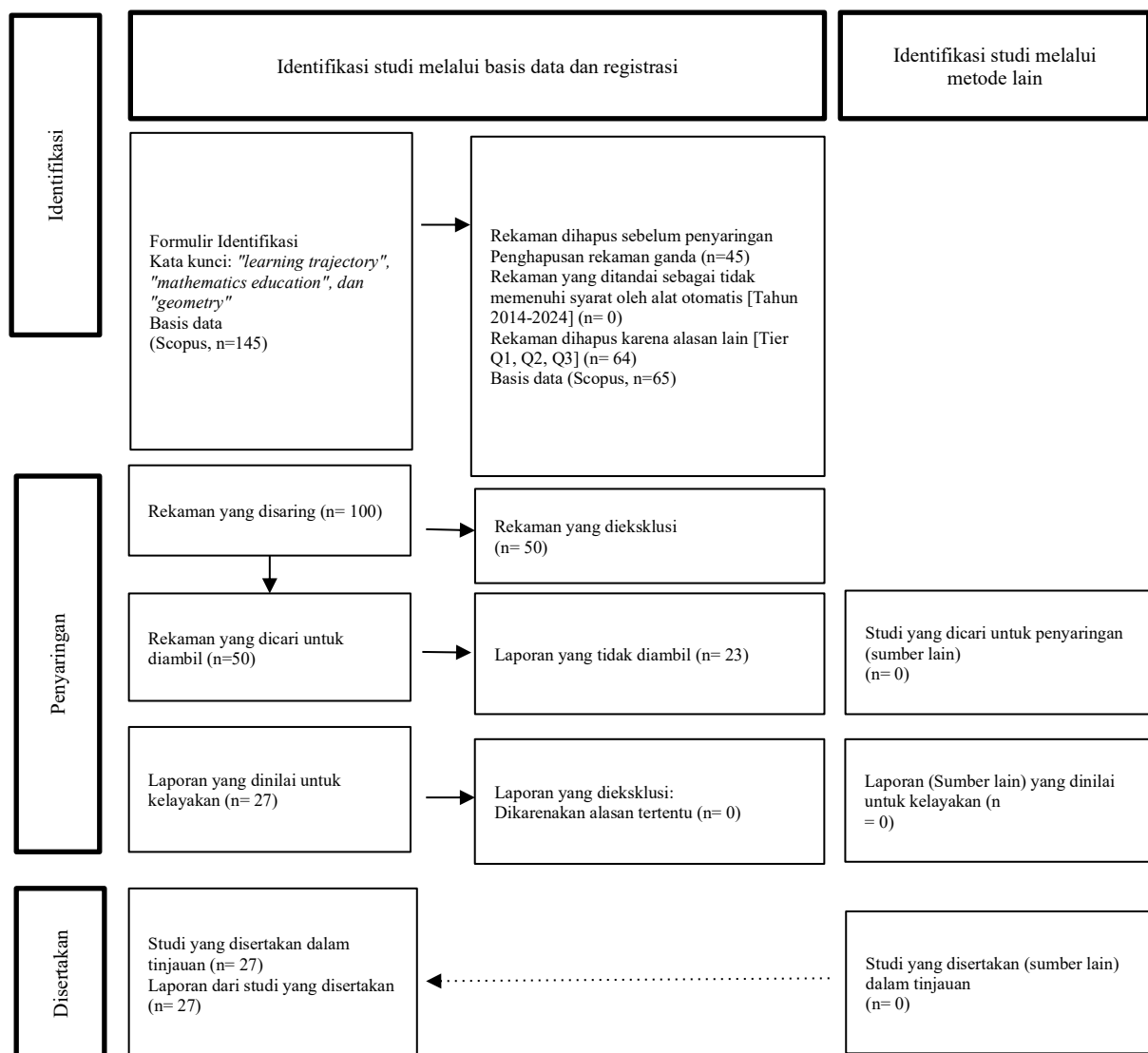
Systematic Literature Review (SLR) menjadi penting karena mampu memetakan perkembangan wacana ilmiah, menilai konsistensi terminologi, dan mengeksplorasi integrasi learning trajectory dengan pendekatan pedagogis lainnya seperti Problem Based Learning, teknologi, dan asesmen formatif. Oleh karena itu, SLR ini dilakukan untuk memberikan gambaran menyeluruh tentang praktik dan pengembangan learning trajectory dalam pembelajaran geometri terkini.

Seiring berkembangnya teknologi, penelitian tentang *learning trajectory* semakin banyak dilakukan. Peneliti menggunakan berbagai metode untuk mengeksplorasi efektivitasnya, salah satunya adalah dengan pendekatan *Systematic Literature Review* (SLR). SLR memungkinkan peneliti untuk menganalisis secara sistematis tren penelitian, tema utama, serta kesenjangan yang ada dalam literatur terkait *learning trajectory*. Dalam hal ini, perangkat Vosviewer digunakan untuk membantu visualisasi data bibliometrik, seperti hubungan antar konsep dan kata kunci, guna memberikan pemahaman yang lebih mendalam mengenai topik yang dibahas. Penelitian ini bertujuan untuk menggali perkembangan konsep *learning trajectory* dalam pembelajaran geometri melalui analisis literatur menggunakan SLR dan Vosviewer. Dengan memahami tren penelitian dan tema utama yang muncul, diharapkan penelitian ini dapat memberikan wawasan tentang bagaimana *learning trajectory* dapat diterapkan secara efektif untuk meningkatkan kualitas pembelajaran geometri. Tujuan utama penelitian ini adalah (1) Mengkaji bagaimana learning trajectory diterapkan dalam pembelajaran geometri berdasarkan literatur yang tersedia. (2) Mengidentifikasi tema utama yang berkembang dalam penelitian terkait *learning trajectory* dan pembelajaran geometri. (3) Mengeksplorasi kontribusi penggunaan teknologi dan asesmen formatif dalam mendukung *learning trajectory* pada pembelajaran geometri. Berdasarkan tujuan tersebut, penelitian ini dirumuskan dalam pertanyaan penelitian (*Research Questions*) yaitu (1) RQ1: Bagaimana tren penelitian terkait *learning trajectory* dalam pembelajaran geometri? (2) RQ2: Apa saja pendekatan utama yang digunakan dalam desain *learning trajectory* untuk pembelajaran geometri? (3) RQ3: Bagaimana teknologi dan asesmen formatif berperan dalam implementasi *learning trajectory*?

METODE

Penelitian ini menggunakan metode *Systematic Literature Review* (SLR) untuk mengidentifikasi dan menganalisis penelitian terkait *learning trajectory* dalam pembelajaran geometri. Pendekatan SLR dilakukan secara sistematis dan terstruktur, mengikuti tahapan yang telah ditetapkan. Proses pertama adalah pencarian literatur menggunakan database terkemuka, yaitu Google Scholar, Scopus dan Web of Science, karena keduanya menyediakan sumber referensi yang terindeks dan relevan secara global. Pencarian dilakukan menggunakan kombinasi kata kunci yaitu "*learning trajectory*", "*mathematics education*", dan "*geometry*", dengan operator logika seperti AND dan OR untuk meningkatkan relevansi hasil. Pencarian dibatasi pada artikel jurnal yang dipublikasikan dalam kurun waktu sepuluh tahun terakhir untuk menjaga relevansi temuan. Tahap berikutnya adalah proses reduksi artikel. Dari hasil

awal pencarian, sebanyak 145 artikel teridentifikasi. Artikel tersebut kemudian diseleksi berdasarkan kriteria inklusi dan eksklusi. Kriteria inklusi meliputi (1) artikel yang berfokus pada pembelajaran matematika, khususnya geometri, (2) artikel yang membahas *learning trajectory* secara eksplisit, dan (3) artikel yang dipublikasikan dalam jurnal peer-reviewed. Kriteria eksklusi mencakup (1) artikel yang tidak tersedia dalam teks lengkap, (2) artikel berupa prosiding atau laporan teknis, serta (3) artikel yang tidak ditulis dalam bahasa Inggris. Setelah proses penyaringan, 27 artikel memenuhi kriteria untuk dianalisis lebih lanjut. Analisis bibliometrik dilakukan menggunakan perangkat lunak Vosviewer. Data bibliografis dari artikel yang lolos seleksi diekstraksi untuk memetakan hubungan antara kata kunci, topik penelitian, serta jaringan penulis. Proses ini melibatkan pengelompokan berdasarkan kekuatan hubungan antar kata kunci (*co-occurrence analysis*) dan visualisasi dalam bentuk *network map*. Analisis ini membantu mengidentifikasi tren utama, tema penelitian dominan, serta kesenjangan penelitian yang relevan dengan topik *learning trajectory* dalam pembelajaran geometri.



Gambar 1. Alur protokol PRISMA

Analisis bibliometrik menggunakan Vosviewer menunjukkan bahwa penelitian terkait *learning trajectory* dan *mathematics education* memiliki relevansi yang kuat. Visualisasi data bibliometrik menunjukkan bahwa kata kunci seperti "*learning trajectory*" dan "*mathematics education*" saling terhubung dalam berbagai penelitian internasional. Hal ini mendukung pentingnya modul yang dikembangkan dalam penelitian ini sebagai salah satu inovasi pembelajaran berbasis bukti.

RQ2: Pendekatan Utama yang digunakan dalam Desain Learning Trajectory untuk Pembelajaran Geometri

Learning trajectory adalah gambaran pemikiran siswa saat proses pembelajaran berupa dugaan dan hipotesis dari serangkaian desain pembelajaran untuk mendorong perkembangan berpikir siswa agar tujuan pembelajaran matematika dapat tercapai sesuai dengan yang diharapkan (Clara et al., 2021; Lantakay et al., 2023; Wu et al., 2020). Komponen utama dalam *learning trajectory* (LT) meliputi (a) tujuan pembelajaran yang jelas, seperti pemahaman tentang sifat-sifat lingkaran, keliling, luas, dan relasi antar elemen lingkaran; (b) aktivitas pembelajaran yang dirancang secara progresif, misalnya eksplorasi menggunakan alat bantu manipulatif atau aplikasi teknologi; dan (c) asesmen formatif untuk memantau pemahaman siswa pada setiap tahap pembelajaran. Komponen ini harus dirancang agar selaras dengan kebutuhan siswa dan memberikan pengalaman belajar yang mendalam. Hasil penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa adanya peningkatan hasil belajar matematika siswa antara sebelum dan sesudah diberlakukannya pembelajaran dengan *learning trajectory* (Putri et al., 2023).

Tabel 1. Pendekatan Utama Yang Digunakan Dalam Desain Learning Trajectory Untuk Pembelajaran Geometri

Pendekatan	Penjelasan	Contoh Implementasi
Pendekatan Berbasis Masalah (<i>Problem-Based Learning</i>)	Melibatkan siswa dalam menyelesaikan masalah kontekstual untuk mempelajari konsep geometri secara bertahap.	Siswa diminta menghitung luas dan keliling tanah dengan bentuk tidak beraturan berdasarkan situasi dunia nyata.
Pendekatan Konstruktivis	Menekankan pembelajaran aktif di mana siswa membangun pengetahuan melalui eksplorasi dan pengalaman langsung.	Guru memberikan tugas eksplorasi untuk menemukan sifat-sifat bangun datar menggunakan alat peraga fisik atau geometri dinamis.
Pendekatan Visualisasi dan Manipulasi Objek	Menggunakan alat bantu visual untuk mempermudah siswa memahami konsep spasial, seperti transformasi, simetri, dan ruang.	Siswa menggunakan perangkat lunak GeoGebra untuk memanipulasi objek geometris, seperti mencerm

Learning trajectory memberikan pola atau rencana yang dapat digunakan sebagai dasar untuk membuat rancangan pembelajaran untuk setiap proses pembelajaran (Hendrik et al., 2020). Pendekatan berbasis *problem-based learning* (PBL) dan *inquiry-based learning* (IBL)

sering diidentifikasi sebagai model *learning trajectory* yang efektif dalam pembelajaran geometri. Model ini memungkinkan siswa untuk terlibat aktif dalam pembelajaran melalui eksplorasi masalah nyata dan investigasi mendalam. Dalam konteks *learning trajectory*, pendekatan Problem-Based Learning (PBL) dikembangkan untuk mendorong siswa dalam memecahkan permasalahan kontekstual yang menstimulasi pemikiran kritis dan pemahaman konseptual. Menurut [Hmelo-Silver \(2004\)](#), PBL terdiri dari beberapa langkah: (1) mengidentifikasi masalah; (2) mengumpulkan informasi; (3) mengembangkan dan menguji solusi; (4) merefleksikan proses belajar. Langkah-langkah ini sangat relevan untuk dijadikan landasan dalam menyusun trajectory belajar yang progresif dalam geometri. Pendekatan berbasis teknologi, seperti penggunaan aplikasi geometri dinamis, juga terbukti mendukung pemahaman siswa terhadap konsep lingkaran. Hasil penelitian sebelumnya dapat menghasilkan *learning trajectory* untuk aturan penjumlahan dan perkalian dalam kaidah pencacahan yang dipelajari melalui kegiatan pembelajaran yang dilakukan menggunakan pendekatan pendidikan matematik realistik ([Rokhmawati et al., 2023](#)).

Tahap *learning trajectory* yang umum meliputi: (a) *initial exploration*, di mana siswa mengenal konsep awal lingkaran melalui pengamatan atau eksperimen sederhana; (b) *concept development*, yang berfokus pada pengembangan konsep melalui aktivitas seperti pengukuran atau representasi visual; dan (c) *application and reflection*, di mana siswa menerapkan pemahaman mereka dalam konteks nyata atau masalah berbasis proyek, serta merefleksikan hasil belajar mereka. Langkah pertama dalam mengembangkan *learning trajectory* adalah menentukan indikator ([Sari et al., 2022](#)). Hasil penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa permainan digital sebaiknya digunakan sebagai sarana edukasi oleh orangtua dan guru dalam mendukung perkembangan anak dan kepekaan mereka terhadap bilangan, khususnya dalam lintasan pembelajaran pengenalan bilangan ([CAN, 2020](#)).

Penerapan *learning trajectory* yang baik dapat meningkatkan pemahaman konseptual siswa, terutama dalam menghubungkan sifat-sifat lingkaran dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari. Selain itu, *learning trajectory* membantu siswa mengembangkan keterampilan berpikir kritis, seperti menganalisis hubungan antara jari-jari, diameter, dan keliling lingkaran. Studi menunjukkan bahwa *learning trajectory* juga memfasilitasi pembelajaran kolaboratif, yang meningkatkan keterampilan komunikasi dan pemecahan masalah. kendala dan kemampuan fitur tugas tertentu dan mengadaptasi fitur-fitur ini untuk memfasilitasi *learning trajectory* ([Bu et al., 2023](#); [Gallagher et al., 2022](#); [Yao et al., 2021](#)). Kemampuan untuk belajar dari umpan balik *learning trajectory* berbasis preferensi yang menghilangkan kebutuhan untuk menyusun model penghargaan numerik secara manual ([Pacchiano et al., 2023](#)). Hasil penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa *learning trajectory* yang dikembangkan menjanjikan informasi untuk merancang intervensi yang mendukung pemikiran aljabar awal anak-anak ([Clara et al., 2021](#)).

RQ3: Teknologi Dan Asesmen Formatif Berperan Dalam Implementasi Learning Trajectory

Teknologi memainkan peran yang signifikan dalam meningkatkan efektivitas learning trajectory pada pembelajaran geometri. Penggunaan perangkat lunak geometri dinamis,

seperti GeoGebra, memungkinkan siswa untuk memvisualisasikan dan memanipulasi objek geometris dalam waktu nyata. Beberapa artikel juga menunjukkan bahwa teknologi dapat mendukung pembelajaran jarak jauh, memungkinkan siswa untuk mengakses materi geometri secara interaktif dari rumah atau tempat lain. Teknologi ini membantu siswa memahami konsep-konsep geometri yang sulit secara lebih mudah dan menarik. Seiring bertambahnya usia anak, kemampuan mereka untuk memahami, merepresentasikan, dan memanipulasi angka mengikuti urutan perkembangan umum yang disebut sebagai *learning trajectory* (Litkowski et al., 2020; Liu et al., 2022; Morais et al., 2019). Rekomendasi mencakup yaitu (a) pengembangan modul ajar berbasis *learning trajectory* yang memadukan aktivitas eksploratif, visualisasi, dan aplikasi teknologi; (b) pelatihan guru dalam merancang dan menerapkan *learning trajectory* secara efektif; dan (c) pengembangan asesmen formatif berbasis *learning trajectory* yang dapat memantau perkembangan pemahaman siswa secara berkelanjutan. *Learning trajectory* dirancang sesuai dengan hipotesis, sehingga siswa dapat menemukan kembali konsep-konsep dalam topik (Wandanu et al., 2020).

Tabel 2. Teknologi dan Asesmen Formatif Berperan dalam Implementasi *Learning Trajectory*

Aspek Peran Teknologi	Deskripsi	Contoh Implementasi	Dampak pada Learning Trajectory
1. Visualisasi	Teknologi membantu memvisualisasikan konsep geometri abstrak menjadi lebih konkret.	Penggunaan perangkat lunak GeoGebra untuk memodelkan bentuk geometri dan transformasi secara interaktif.	Membantu siswa memahami konsep seperti simetri, rotasi, dan translasi secara lebih cepat dan jelas.
2. Manipulasi Objek	Teknologi memungkinkan siswa untuk memanipulasi objek geometris secara langsung untuk mengeksplorasi hubungan antar bentuk atau sifat geometris.	Simulasi interaktif menggunakan aplikasi geometri dinamis seperti Cabri 3D.	Meningkatkan keterlibatan siswa dalam pembelajaran dan memperkuat keterampilan berpikir spasial.
3. Pembelajaran Jarak Jauh	Teknologi menyediakan akses pembelajaran geometri yang fleksibel, memungkinkan siswa belajar dari mana saja.	Pembelajaran menggunakan video pembelajaran atau platform seperti Khan Academy dan ClassDojo.	Mendukung keberlanjutan pembelajaran meskipun siswa tidak hadir di kelas.
4. Kolaborasi Online	Teknologi memungkinkan kolaborasi antara siswa dalam memecahkan masalah geometri secara virtual.	Penggunaan alat seperti Google Jamboard atau Microsoft Whiteboard.	Meningkatkan keterampilan komunikasi dan kolaborasi siswa dalam memecahkan masalah geometris.
Peran Asesmen Formatif			
1. Monitoring Kemajuan	Asesmen formatif digunakan untuk melacak kemajuan siswa sepanjang <i>learning trajectory</i> .	Tes kecil berbasis aplikasi seperti Kahoot atau Quizizz untuk mengevaluasi pemahaman siswa pada tiap tahap pembelajaran.	Memberikan umpan balik real-time kepada siswa untuk memperbaiki kesalahan dan mengarahkan pembelajaran.
2. Penyesuaian Pembelajaran	Guru dapat menggunakan data dari asesmen untuk	Analisis hasil tugas siswa menggunakan platform	Memastikan <i>learning trajectory</i> fleksibel sesuai

Aspek Peran Teknologi	Deskripsi	Contoh Implementasi	Dampak pada Learning Trajectory
	menyesuaikan pembelajaran agar sesuai dengan kebutuhan siswa.	seperti Google Classroom untuk memahami kesulitan siswa.	dengan tingkat pemahaman siswa.
3. Umpan Balik Interaktif	Asesmen formatif memberikan umpan balik yang bersifat spesifik dan interaktif sehingga siswa memahami kekurangan mereka dengan jelas.	Penggunaan aplikasi seperti Edmodo untuk memberikan komentar langsung pada tugas siswa.	Meningkatkan keterlibatan siswa dalam proses belajar dan memotivasi mereka untuk memperbaiki diri.

Guru sering menghadapi kendala seperti keterbatasan waktu dalam merancang *learning trajectory* yang terperinci, kurangnya sumber daya pembelajaran yang mendukung, serta kesulitan dalam menyesuaikan *learning trajectory* dengan tingkat pemahaman siswa yang beragam. Selain itu, kurangnya pelatihan tentang implementasi *learning trajectory* juga menjadi hambatan signifikan. *Learning trajectory* sebagai prediksi mengenai langkah yang akan dilalui dalam pembelajaran (Ali et al., 2021; Domu & Mangelep, 2020; Rich et al., 2018). *Trajectory* berbasis pembelajaran diusulkan untuk mengelola proses pembelajaran (Altche & Fortelle, 2017; L. Wang et al., 2021; S. Wang et al., 2021). Hasil penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa lintasan pembelajaran dapat bertindak sebagai perancah untuk memperhatikan pemahaman matematika siswa (Lee & Lee, 2021).

Modul ajar berbasis *learning trajectory* perlu dirancang agar fleksibel, responsif terhadap kebutuhan siswa, dan mendukung pembelajaran aktif. Modul ajar berbasis *learning trajectory* sangat penting untuk mendukung pembelajaran geometri lingkaran yang terstruktur dan efektif. Modul ini harus mencakup aktivitas yang mengakomodasi berbagai gaya belajar siswa, memberikan panduan langkah demi langkah untuk guru, serta menyertakan alat bantu seperti visualisasi dan aplikasi teknologi. Modul juga perlu dirancang agar mudah diimplementasikan dalam berbagai konteks kelas, sehingga membantu guru menghadapi tantangan dalam menerapkan *learning trajectory* dan meningkatkan kualitas pembelajaran geometri secara keseluruhan.

SIMPULAN

Pembelajaran geometri, khususnya pada konsep lingkaran, dapat ditingkatkan secara signifikan melalui penerapan *learning trajectory* yang dirancang dengan baik. *Learning trajectory* memberikan kerangka pembelajaran yang terstruktur, mencakup tujuan pembelajaran yang jelas, aktivitas progresif, dan asesmen formatif untuk memantau perkembangan pemahaman siswa. Tahap-tahap *learning trajectory*, seperti eksplorasi awal, pengembangan konsep, dan penerapan, telah terbukti efektif dalam membangun pemahaman konseptual dan keterampilan berpikir kritis siswa. Namun, penerapan *learning trajectory* tidak terlepas dari tantangan, seperti keterbatasan sumber daya, waktu, dan pemahaman guru tentang pendekatan ini. Oleh karena itu, pengembangan modul ajar

berbasis *learning trajectory* yang memadukan aktivitas eksploratif, teknologi, dan asesmen formatif menjadi solusi strategis untuk mendukung implementasi *learning trajectory* yang lebih efektif. Hasil analisis literatur menunjukkan bahwa pendekatan berbasis *problem-based learning* dan *inquiry-based learning* merupakan model *learning trajectory* yang efektif untuk pembelajaran geometri. Meskipun demikian, masih terdapat kesenjangan penelitian, terutama terkait panduan praktis dan integrasi teknologi dalam *learning trajectory* pada materi lingkaran. Sebagai rekomendasi, diperlukan penelitian lanjutan untuk mengisi kesenjangan tersebut, pelatihan guru untuk meningkatkan pemahaman mereka terhadap *learning trajectory*, serta penyediaan modul ajar yang responsif terhadap kebutuhan siswa dan guru. Dengan langkah ini, *learning trajectory* dapat menjadi pendekatan yang strategis dalam meningkatkan kualitas pembelajaran geometri, khususnya pada konsep lingkaran.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didanai oleh Universitas Sebelas Maret 2025, melalui hibah penelitian: Penelitian Pascasarjana Magister, Kontrak No: 369/UN27.22/PT.01.03/2025

DAFTAR PUSTAKA

- Ali, S., DiPaola, D., Lee, I., Hong, J., & Breazeal, C. (2021, 2021). *Exploring generative models with middle school students* Conference on Human Factors in Computing Systems - Proceedings, <https://doi.org/10.1145/3411764.3445226>
- Althe, F., & Fortelle, A. (2017, 2017). *An LSTM network for highway trajectory prediction* IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, Proceedings, ITSC, <https://doi.org/10.1109/ITSC.2017.8317913>
- Bu, X., Dai, X., & Hou, R. (2023). *Data-driven iterative learning trajectory tracking control for wheeled mobile robot under constraint of velocity saturation*. IET Cyber-Systems and Robotics.
- Can, D. (2020). Supporting Learning Trajectories for the Development of Number Concept: Digital Games. *Kuramsal Eđitimibilim*, 13(4), 663–684. <https://doi.org/10.30831/akukey.692165>
- Clara, A., Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Gardiner, A. M., & Newman-owens, A. (2021). A learning trajectory in Kindergarten and first grade students' thinking of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Domu, I., & Mangelep, N. O. (2020). The Development of Students' Learning Material on Arithmetic Sequence Using PMRI. *Approach*, 196(Ijcse), 426–432. <https://doi.org/10.2991/aer.k.201124.076>

- Gallagher, M. A., Parsons, S. A., & Vaughn, M. (2022). Adaptive teaching in mathematics: a review of the literature. *Educational Review*, 74(2), 298–320. <https://doi.org/10.1080/00131911.2020.1722065>
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). *Design research from a learning design perspective*. Educational Design Research.
- Hendrik, A. I., Ekowati, C. K., & Samo, D. D. (2020). Kajian Hypothetical Learning Trajectories dalam Pembelajaran Matematika di Tingkat SMP. *Fraktal: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 1(1), 1–11. <https://doi.org/10.35508/fractal.v1i1.2683>
- Hmelo-Silver, C. E. (2004). Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn? *Educational Psychology Review*, 16(3), 235–266. <https://doi.org/10.1023/B:EDPR.0000034022.16470.f3>
- Lantakay, C. N., Senid, P. P., Blegur, I. K. S., & Samo, D. D. (2023). Hypothetical Learning Trajectory: Bagaimana Perannya dalam Pembelajaran Matematika di Sekolah Dasar? *Griya Journal of Mathematics Education and Application*, 3(2), 384–393. <https://doi.org/10.29303/griya.v3i2.329>
- Lee, M. Y., & Lee, J. E. (2021). A learning trajectory as a scaffold for pre-service teachers' noticing of students' mathematical understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(3), 539–558. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10062-0>
- Litkowski, E. C., Duncan, R. J., Logan, J. A. R., & Purpura, D. J. (2020). When do preschoolers learn specific mathematics skills? Mapping the development of early numeracy knowledge. *Journal of Experimental Child Psychology*, 195, 104846. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2020.104846>
- Liu, C., Yang, H., Fu, J., & Qian, X. (2022, 2022). *Learning Trajectory-Aware Transformer for Video Super-Resolution* Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, <https://doi.org/10.1109/CVPR52688.2022.00560>
- Morais, R., Le, V., Tran, T., Saha, B., Mansour, M., & Venkatesh, S. (2019, 2019). *Learning regularity in skeleton trajectories for anomaly detection in videos* Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, <https://doi.org/10.1109/CVPR.2019.01227>
- Mousoulides, N., & Sriraman, B. (2020). Encyclopedia of Mathematics Education. In *Encyclopedia of Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8>
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author.
- Nursyahidah, F., Saputro, B. A., Albab, I. U., & Aisyah, F. (2020). Pengembangan Learning Trajectory Based Instruction Materi Kerucut Menggunakan Konteks Megono Gunung. *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, 9(1), 47–58. <https://doi.org/10.31980/mosharafa.v9i1.591>
- Pacchiano, A., Saha, A., & Lee, J. (2023). Dueling RL: Reinforcement Learning with Trajectory Preferences. *Proceedings of Machine Learning Research*, 206, 6263–6289.

- Putri, N. S., Sridana, N., Junaidi, J., & Hikmah, N. (2023). Pengaruh Learning Trajectory Terhadap Hasil Belajar Matematika Siswa Kelas VII SMP Negeri 2 Sakra Tahun Ajaran 2021/2022. *Jurnal Ilmiah Profesi Pendidikan*, 8(1), 391–396. <https://doi.org/10.29303/jipp.v8i1.1189>
- Rich, K. M., Binkowski, T. A., Strickland, C., & Franklin, D. (2018, 2018). *Decomposition: A K-8 computational thinking learning trajectory* ICER 2018 - Proceedings of the 2018 ACM Conference on International Computing Education Research, <https://doi.org/10.1145/3230977.3230979>
- Rokhmawati, L. N., Ratnaningsih, N., & Ni'mah, K. (2023). ATURAN PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN DALAM KAIDAH PENCACAHAN. BAGAIMANAKAH DESAIN HYPOTHETICAL LEARNING TRAJECTORY BERBASIS RME? *JPMI (Jurnal Pembelajaran Matematika Inovatif)*, 6(3), 937–950. <https://doi.org/10.22460/jpmi.v6i3.17321>
- Sari, D. L., Fitriani, D. A., Khaeriyah, D. Z., Hartono, & Nursyahidah, F. (2022). Hypothetical Learning Trajectory pada Materi Peluang: Konteks Mainan Tradisional Ular Naga. *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, 11(2), 203–214. <https://doi.org/10.31980/mosharafa.v11i2.699>
- Schult, J., Mahler, N., Fauth, B., & Lindner, M. A. (2022). Did students learn less during the COVID-19 pandemic? Reading and mathematics competencies before and after the first pandemic wave. *School Effectiveness and School Improvement*, 33(4), 544-563. <https://doi.org/10.1080/09243453.2022.2061014>
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114–145. <https://doi.org/10.2307/749205>
- Towe, M. M., & Julie, H. (2020). Developing learning trajectories with the RME of pythagorean theorem. *Journal of Physics: Conference Series*, 1470(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1470/1/012027>
- Wandanu, R. H., Mujib, A., & Firmansyah. (2020). Hypothetical Learning Trajectory berbasis Pendidikan Matematika Realistik untuk Mengembangkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa. *Jurnal MathEducation Nusantara*, 3(2), 8–16.
- Wang, L., Wang, K., Pan, C., Xu, W., Aslam, N., & Hanzo, L. (2021). Multi-Agent Deep Reinforcement Learning-Based Trajectory Planning for Multi-UAV Assisted Mobile Edge Computing. *IEEE Transactions on Cognitive Communications and Networking*, 7(1), 73–84. <https://doi.org/10.1109/TCCN.2020.3027695>
- Wang, S., Bao, Z., Culpepper, J. S., & Cong, G. (2021). A Survey on Trajectory Data Management, Analytics, and Learning. *ACM Computing Surveys*, 54(2), 1–36. <https://doi.org/10.1145/3440207>
- Wu, H., Lyu, F., Zhou, C., Chen, J., Wang, L., & Shen, X. (2020). Optimal UAV Caching and Trajectory in Aerial-Assisted Vehicular Networks: A Learning-Based Approach. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 38(12), 2783–2797. <https://doi.org/10.1109/JSAC.2020.3005469>

Yao, Z., Yu, J., & Ding, J. (2021). Contrastive learning of graph encoder for accelerating pedestrian trajectory prediction training. *IET Image Processing*, 15(14), 3645–3660. <https://doi.org/10.1049/ipr2.12185>