

PROSES BERPIKIR SISWA SMP MENGONSTRUKSI BUKTI INFORMAL GEOMETRI SEBAGAI PROSEP YANG DIREPRESENTASIKAN SECARA VISUAL/SIMBOLIK

Faaso Ndraha

IKIP Gunungsitoli, Nias, Sumatera Utara
e-mail: faandraha@yahoo.com

Abstrak

This paper was aimed to describe the stages of the thinking processes of junior high school students in constructing geometry informal proof as procept that represented visually/ symbolically. Uncovering the thinking process was conducted when the students began to construct proof of a theorem that they never proved to the point of thinking about the process and concept of the proof proceptually. This study used qualitative approach. The results of this study revealed that the stage of the thinking process of junior high school students in constructing geometry informal proofs as a procept represented visually/symbolically begins with (1) identifying stage, (2) mobilization and organization, (3) planning stage, (4) application stage, (5) the stage of giving a meaning, (6) evaluation stage, (7) the procept stage.

Keywords: *procept, geometry visual/symbolical proof, thinking processes.*

PENDAHULUAN

Bukti dalam pembelajaran geometri SMP sangat penting. Pembuktian pada geometri sekolah tidak hanya dapat meningkatkan pemahaman konsep-konsep matematika, juga dapat melatih berpikir untuk meningkatkan kemampuan bernalar dan membangun karakter peserta didik (de Walle, 1990; Soedjadi, 2000; van Hiele dalam Fuys, dkk., 1988). Walaupun mayoritas siswa SMP belum mampu menyusun bukti formal dalam pembelajaran (Fuys, dkk, 1998; Sunardi, 2000), tetapi kegiatan mengonstruksi bukti akan mengoptimalkan hasil belajar dan mengembangkan kemampuan mereka mengonstruksi bukti formal matematika lebih lanjut (de Villiers, 1999; Hemmi, dkk., 2010; Moore, 1994). Karena itu memahami proses berpikir siswa SMP mengonstruksi bukti dalam kegiatan belajar geometri sangat penting, sebagai bahan pertimbangan penyelenggaraan pembelajaran untuk memperoleh hasil optimal sesuai kemampuan berpikir siswa.

Bukti yang disepakati pakar dalam matematika hanyalah bukti deduktif formal (O'Daffer dan Thornquist, 1993:49). Tetapi dalam pembelajaran, kemampuan siswa mengonstruksi bukti formal tidak tercapai langsung dalam setahap, melainkan berkembang secara bertahap. Tall (1995) menjelaskan bahwa bentuk representasi bukti sesuai dengan perkembangan kemampuan siswa, yang berkembang dari bukti enaktif, bukti visual, bukti simbolis dan bukti formal. Fakta empirik tersebut yang mendasari pandangan adanya bukti lain dalam pembelajaran, yang tidak bersifat deduktif formal, dan disebut bukti informal (Heinze dan

Kwak, 2002; Knut, 2002; Vinner, 2002). Bukti informal geometri adalah bukti geometri yang (1) tidak setiap pengertian pangkal, aksioma, definisi, dan teorema yang digunakan dinyatakan secara eksplisit, atau (2) tidak setiap langkah pembuktian disertai alasan deduktifnya (Ndraha, 2015).

Secara substansi, aspek proses penalaran maupun aspek konsep bukti merupakan dua hal penting, yang walaupun berbeda, tetapi tidak tepat dipisahkan untuk memahami teorema yang dibuktikan secara optimal. Secara empirik, Erh-Tsung (2003) telah melakukan penelitian kepada mahasiswa tentang pemahaman bukti teorema relasi ekuivalensi. Pada tahun kedua, mahasiswa menyatakan teorema tersebut untuk menunjuk silih berganti proses dan konsep buktinya. Berdasarkan fakta ini, Erh-Tsung menyimpulkan bahwa bukti dapat dipandang sebagai prosep, dan redaksi teorema sebagai simbolnya. Selain fakta tersebut, ada siswa yang tidak mampu menyusun bukti suatu teorema geometri, ternyata tidak memahami makna teorema tersebut secara geometri, walaupun mampu menggunakan teorema tersebut dalam memecahkan masalah. Siswa tersebut hanya memahami makna teorema secara aritmatik. Tetapi siswa lain yang mampu menyusun bukti dan memahami maknanya, mampu memahami makna teorema yang dibuktikan tersebut secara geometri maupun secara aritmatika (Ndraha, 2011; 2015). Dengan demikian bukti lebih tepat dipandang sebagai dualitas proses dan konsep, disingkat prosep.

Gray dan Tall (1994) mengembangkan teori prosep berdasarkan teori Piaget (Davis, dkk, 2000). Prosep merupakan campuran proses, konsep, dan simbol yang menyatakan proses dan konsep tersebut. Gray dan Tall (1994:120) menjelaskan bahwa "*An elementary procept is the amalgam of three components: a process which produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object. A procept consists of a collection of elementary procepts which have the same object*". Sebagai prosep, bukti juga memiliki proses, konsep dan simbol. Berdasarkan pendapat Gray dan Tall (1994) dan Erh-Tsung (2003), didukung oleh Piaget (1971) dan Greeno dalam Gray dan Tall (1994), Ndraha (2015:43-50) menyimpulkan bahwa bukti dapat dipandang sebagai prosep. *Proses* bukti adalah ide abstrak prosedural sebagai enkapsulasi prosedur-prosedur yang dapat dilakukan dan sukses mengonstruksi bukti. *Konsep* bukti adalah ide abstrak konseptual sebagai enkapsulasi proses bukti. Sedangkan *simbol* prosep adalah redaksi teorema, karena menyatakan ide abstrak prosedural (*proses*) dan ide abstrak konseptual (*konsep*) sebagaimana dinyatakan detail pada bukti.

Gray dan Tall menjelaskan lebih lanjut bahwa ada tiga tahap aktivitas pengonstruksian prosep dalam pikiran yaitu tahap prosedur, proses dan prosep. "*.... the meaning of symbols developed through a sequence of activities: (a) procedure, where a finite succession of decisions and actions is built up into a coherent sequence, (b) process, where increasingly efficient ways become available to achieve the same result, now seen as a whole, (c) procept, where the symbols are conceived flexibly as processes to do and concepts to think about* (Tall, 1997:13).

Menurut Gray dan Tall, objek matematika dalam mental terbentuk dari suatu aksi dengan melakukan langkah demi langkah prosedur matematika tertentu. Selanjutnya mengulangi beberapa kali prosedur tersebut, sambil berusaha memahami pola kerja dan menghubungkan-hubungkan makna langkah-langkah dari aksi yang dilakukan. Kegiatan ini adalah tahap proses. Akhirnya mengoordinasikan pemahaman tentang pola aksi dan makna tersebut di dalam pikiran, hingga akhirnya keseluruhan langkah yang dikerjakan dipahami sebagai suatu item pengetahuan atau konsep. Misalnya seorang anak mulai belajar menghitung jumlah lima buah benda dengan belajar prosedur menghitung. Selanjutnya dia mengulangi prosedur menghitung tersebut, misalnya menghitung beberapa kumpulan benda lainnya. Pengulangan kegiatan menghitung akan membentuk pengetahuannya tentang proses menghitung dan konsep bilangan 5 dari hasil hitungannya. Ketika dia melihat simbol '5' pada waktu selanjutnya, mengingatkannya pada konsep bilangan lima dan proses menghitung yang berkaitan dengannya. Mereka yang mengenal 5 sebagai konsep, tetapi tidak memahami proses menghitung, sebenarnya tidak memahami apa yang dimaksud dengan 5. Hal ini menunjukkan bahwa proses menghitung dan konsep bilangan secara bersama-sama memberi makna pada simbol 5. Dengan demikian, lebih tepat memandang 5 sebagai simbol proses, menyatakan proses menghitung dan konsep bilangan. Seseorang yang telah sampai pada tahap proses, memikirkan proses secara proseptual. Berpikir proseptual adalah memikirkan secara fleksibel berpindah-pindah dari proses ke konsep dan sebaliknya dalam suatu waktu sebagai satu item pengetahuan.

Ada teori lain tentang proses berpikir mengkonstruksi objek matematika dalam mental. Yang sering dirujuk adalah teori Piaget dan Dubinsky, dkk. Piaget (1971; 1985) menjelaskan bahwa untuk memahami objek matematika dimulai dengan *aksi* terkait objek tersebut dalam lingkungan, kemudian aksi tersebut diinternalisasi menjadi *proses*, lalu dienkapsulasi menjadi *objek*. Tetapi Piaget tidak sampai mengungkap bagaimana objek dapat dipikirkan secara proseptual, ketika dapat dipahami sebagai proses. Proses merupakan unit kognitif dalam berpikir matematika yang sukses. Jika telah memahami sebagai proses, proses dan konsep dipahami dalam bentuknya yang sederhana, sehingga dapat memikirkan keduanya silih berganti secara fleksibel pada suatu waktu, mengingat segera dan lengkap, dan dapat menggunakan keduanya dalam situasi baru sebagai satu langkah saja dalam proses berpikir matematika selanjutnya (Crowley, dkk., 2001:85).

Teori lain oleh Dubinsky, dkk., dalam buku mereka yang terakhir, Arnon, dkk. (2014), mengungkapkan bahwa sejak tahun 1983 hingga kini, Dubinsky dan kemudian diikuti oleh beberapa orang lainnya, menyimpulkan bahwa untuk memahami sesuatu dalam matematika dimulai dengan *aksi* (A), kemudian diinternalisasi dan diinteriorisasi menjadi *proses* (P), lalu dienkapsulasi menjadi *objek* (O), dan dihubungkan menjadi *skema* (S), disingkat APOS. Belakangan mereka menggunakan istilah tematisasi sebagai mekanisme mental membentuk

skima, untuk menyesuaikan dengan istilah Piaget (1983/1983). Contoh yang sering diberikan adalah konsep fungsi. Pada siklus A-P-O-S memahami konsep fungsi, dimulai dengan aksi, yang diinternalisasi menjadi proses, dienkapsulasi sebagai objek (fungsi sebagai objek), barulah menghubungkan ketiga hal tersebut, kemudian memahami fungsi atas fungsi-misalnya fungsi jumlah dua fungsi atau komposisi dua fungsi- sampai memahami ring fungsi atau fungsi ruang vektor dimensi tak hingga. Padahal untuk memahami fungsi jumlah dua fungsi harus dimulai dengan memahami aksi prosedural memetakan menurut fungsi jumlah dua fungsi, hingga memahami aksi tersebut sebagai proses (suatu ide abstrak prosedural), dan mengenkapsulasinya sebagai konsep hingga dapat dipikirkan secara proseptual, sekalipun telah memahami fungsi sebagai objek sebelumnya. Dengan demikian ada satu siklus tahap prosedur-proses-prosep menurut teori Prosep selama proses berpikir memahami fungsi sebagai jumlah dua fungsi. Untuk memahami fungsi komposisi fungsi selanjutnya juga dimulai dengan memahami aksi proseduralnya, secara lengkap melalui satu siklus tahap prosedur-proses-prosep. Menurut teori APOS, hal tersebut hanya subtahap *inter* dari tahap skima, bukan satu siklus A-P-O-S.

Menurut penulis, berdasarkan penjelasan di depan, teori APOS lebih relevan menjelaskan siklus proses berpikir mengonstruksi konsep, sedangkan teori Prosep lebih relevan untuk mengonstruksi objek matematika dalam mental. Dalam hal ini, konsep adalah ide yang dapat digunakan untuk mengklasifikasikan objek matematika. Jika berdasarkan teori Prosep, fungsi, fungsi jumlah dua fungsi, fungsi komposisi fungsi, ring fungsi atau objek lainnya tidak dipahami sebagai objek saja, tetapi sebagai prosep, dan dapat dipikirkan secara proseptual. Sejalan dengan pandangan ini, untuk memahami konsep segitiga lebih memadai jika menggunakan teori APOS, tetapi untuk memahami objek di dalamnya, misalnya suatu sifat atau teorema, lebih relevan jika menggunakan teori prosep.

Teori Gray dan Tall tersebut diberi label "Prosep", singkatan proses dan konsep. Tetapi proses berpikir mengonstruksi prosep dalam mental terdiri dari tiga tahap, yaitu: tahap prosedur, tahap proses, dan tahap prosep (Tall, 1997). Teori prosep tidak hanya tentang proses dan konsep, dan bukan penyederhanaan teori APOS. Teori ini disebut prosep, karena hal tersebut yang membedakannya dengan teori lain yang sejenis, misalnya dengan teori Piaget atau Dubinsky, dkk. Ciri khas tersebut bahwa enkapsulasi proses adalah konsep, dan di dalam mental tidak terpisahkan dengan proses secara alamiah, sehingga dikenal sebagai prosep (dualitas proses dan konsep). Dalam hal ini, konsep adalah ide abstrak konseptual sebagai enkapsulasi proses. Prosep merupakan *hasil* proses berpikir, yang dapat disejajarkan dengan - tapi tidak sekedar sebagai- objek menurut teori APOS. Sedangkan istilah "APOS" merupakan singkatan *tahap-tahap proses* berpikir memahami matematika (Dubinsky, dkk., 2014). Dengan demikian label APOS menjelaskan tahap *proses* berpikir. Sedangkan istilah "prosep" sebagai *hasil* proses berpikir, tidak tepat dijadikan dasar menentukan tahap proses berpikir.

Perbandingan lebih detail teori APOS dan Prosep dapat dibaca dalam Ndraha (2015:60-63). Berdasarkan pertimbangan di depan, teori Prosep relevan menjelaskan proses berpikir mengonstruksi bukti –dari suatu teorema- sebagai prosep.

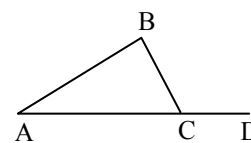
Teori tentang proses berpikir mengonstruksi bukti yang menjadi rujukan pada masa ini adalah teori Polya (1973). Polya menjelaskan bahwa untuk mengonstruksi bukti dimulai dengan mengidentifikasi data prinsipil masalah, memobilisasi dan mengorganisasikan data, merumuskan rencana, mengaplikasikannya, dan melihat kembali (*lookingback*) seluruh hasil kerja. Tetapi Polya tidak memandang bukti sebagai prosep. Di lain sisi, teori prosep saat ini dikembangkan pada matematika kalkulasi dan komputasi, bukan pada geometri. Berdasarkan paduan kedua teori ini, akan dilakukan eksplorasi untuk mengembangkan teori Polya, dengan memandang bukti sebagai prosep.

Dalam pembelajaran, siswa mengonstruksi bukti visual, dengan dilengkapi keterangan dalam bentuk pernyataan simbolik. Representasi bukti tidak murni berbentuk visual saja atau simbolik saja. Berdasarkan fakta tersebut, peneliti merumusan masalah sebagai berikut. Bagaimana tahap dan karakteristik proses berpikir siswa SMP mengonstruksi bukti informal geometri sebagai prosep yang direpresentasikan secara visual/symbolik? Tulisan ini bertujuan mendeskripsikan tahap dan karakteristik proses berpikir siswa SMP memahami bukti informal, khususnya bukti visual/symbolik geometri sebagai prosep. Hasil penelitian diharapkan memberikan kontribusi kepada teori psikologi pengajaran matematika dan desain pembelajaran, khususnya tentang proses berpikir mengonstruksi bukti informal geometri sebagai prosep.

A. METODE

Penelitian dilakukan dengan pendekatan kualitatif. Instrumen terbagi tiga, yang intinya

- 1) Membuktikan “jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^0 ”.
- 2) Menyusun bukti lain dari “jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^0 ”.
- 3) Menggunakan pengetahuan selama menyelesaikan tugas 1) dan 2) untuk menyelesaikan masalah. Untuk itu diberikan dua tugas berikut.
 - a) Membuktikan bahwa $\sphericalangle BCD$ sama dengan jumlah $\sphericalangle BAC$ dan $\sphericalangle ABC$, jika titik C terletak di antara A dan D.
 - b) Membuktikan bahwa jumlah besar sudut-sudut jajargenjang adalah 360^0 .



Tugas 1) diberikan untuk menciptakan kondisi agar terjadi proses berpikir tahap prosedur, tugas 2) untuk tahap proses, dan tugas 3) untuk tahap prosep. Subyek penelitian terdiri dari 2 orang siswa SMP. Untuk mendapatkan data tahap prosedur, subyek penelitian

adalah mereka yang belum pernah menyelesaikan tugas 1) sebelumnya. Validasi data dilakukan dengan triangulasi metode, yaitu meng-*crosscheck* data yang dikumpulkan dalam wawancara, data dokumen (lembar kerja), dan data pengamatan selama siswa menyelesaikan tugas. Untuk audit data, seluruh kegiatan di-*shooting* dan disimpan bersama dengan dokumen lembar kerja siswa. Wawancara yang dilakukan adalah wawancara berbasis tugas untuk mengungkap proses berpikir siswa selama mengonstruksi bukti hingga memahaminya sebagai prosep. Analisis data dilakukan terhadap setiap subjek, kemudian data keduanya dibandingkan untuk melengkapi dan memverifikasi data, sehingga lebih meyakinkan peneliti.

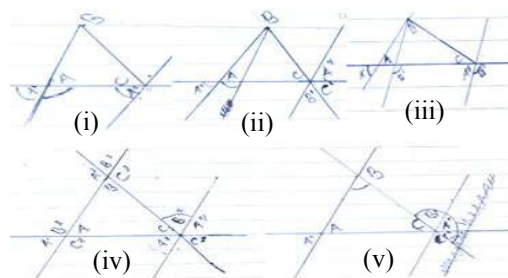
HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Penelitian

Subyek penelitian (S1 dan S2) menyelesaikan tugas pertama (T1), tugas kedua (T2) dan tugas ketiga (T3) dalam bentuk gambar, dilengkapi dengan beberapa pernyataan matematika simbolik. S1 adalah laki-laki, sedangkan S2 adalah perempuan. Kedua subyek belum pernah membuktikan teorema “jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^0 ”, memaknai pernyataan atau teorema tersebut secara aritmatik bahwa jumlah hasil pengukuran sudut-sudut segitiga berjumlah 180^0 , pernah mempelajari hubungan sudut-sudut yang terbentuk oleh garis-garis berpotongan, dan mengonstruksi bukti dalam bentuk visual/symbolik.

Penyelesaian tugas sebagian besar direpresentasikan dalam bentuk gambar. Jika memperbaiki gambar i, subyek merepresentasikannya dalam gambar ii, demikian seterusnya hingga menghasilkan gambar sebagai representasi penyelesaian tugas yang benar menurut subyek. Untuk memudahkan memahami proses berpikir yang dilakukan subyek selama mengonstruksi penyelesaian tugas, penulis memberi indeks gambar menurut urutan pengonstruksinya, dimulai dari i, ii, iii, dan seterusnya.

Lembar kerja S1 menyelesaikan tugas T1 dapat dilihat pada Gambar 1. Berdasarkan lembar kerja penyelesaian T1, peneliti melakukan wawancara kepada S1. Petikan wawancara berbasis Gambar 1(iv) sebagai berikut.



Gambar 1. Lembar kerja S1 Tugas T1

P : “Terus... setelah kamu menulis semua ini (menunjuk semua sudut-sudut di sekitar titik sudut segitiga), apa yang terpikirkan padamu?”

S1 : “Tadi mau... anu yang ini (menunjuk tiga sudut yang membentuk sudut lurus: sudut A^2 , sudut C dan sudut B^2), tapi takut yang ini (menunjuk sudut C).”

P : “Apakah maksudmu, kamu mulai menduga bahwa sudut-sudut ini (menunjuk tiga sudut yang membentuk sudut lurus: sudut A^2 , sudut C dan sudut B^2) adalah bukti yang diminta?”

S1 : “Iya”

P : “Tetapi kamu takut karena apa?”

S1 : “Di sini (menunjuk A^2 & B^2) ada dua, yang ini (menunjuk C) nggak ada”.

P : “Oke, sampai di sini apa pengetahuan baru yang kamu peroleh?”

S1 : “Cara mengerjakannya mencari pelurus, mencari pelurusnya”.

Berdasarkan pemahamannya ini, S1 membuat rencana penyelesaian tugas, kemudian mengonstruksi gambar 1(v), memeriksa dan memperbaiki yang salah, hingga ia yakin bahwa gambar tersebut merupakan penyelesaian tugasnya. Subyek juga dapat menjelaskan makna gambar penyelesaian (gambar 1(v)). Ketika peneliti menanyakan makna “jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^0 ” baginya, subyek menjelaskan usaha “mencari pelurus sudut-sudut segitiga”. Hal ini menunjukkan bahwa subyek memandang teorema sebagai simbol yang menyatakan prosedur bukti.

Wawancara terhadap S1 berdasarkan T1 menunjukkan bahwa proses berpikir yang terjadi dimulai dengan tahap identifikasi: (1) mengidentifikasi hal-hal prinsipil dalam lembar tugas, dan (2) melukis gambar mental (segitiga) untuk memperjelas masalah. Tahap kedua adalah mobilisasi dan organisasi data: (1) mengingat dan memilih pengetahuan atau pengalaman sebelumnya yang relevan dengan masalah, terutama hubungan sudut-sudut yang terbentuk oleh garis-garis berpotongan, (2) menerapkannya dalam kondisi masalah (gambar 1(i)-(iv)), kemudian (3) mengorganisasikan semua data yang diperoleh untuk membuat konsepsi tentang masalah (gambar 1(iv)). Tahap ketiga adalah membuat rencana: (1) merumuskan masalah berdasarkan konsepsi masalah pada gambar 1(iv)), (2) merumuskan langkah-langkah penyelesaian. Tahap keempat adalah aplikasi rencana (gambar 1(v)): (1) melengkapi gambar sesuai rencana penyelesaian, (2) memeriksa langkah-langkah pembuktian, dan (3) memperbaiki yang salah. Pada tahap ini, S1 dapat menyebutkan prosedur pembuktian yang dilakukannya, tetapi belum mampu memaknai seluruh rangkaian bukti yang telah dia susun.

Berdasarkan lembar tugas T2 dan wawancara yang dilakukan, terungkap bahwa S1 mengonstruksi bukti dengan mengikuti keempat tahap proses berpikir ketika menyelesaikan T1. Perbedaan keduanya terutama pada pembentukan konsepsi tentang masalah. Pembentukan konsepsi tentang masalah T1 berlangsung dari proses menerapkan pengetahuan relevan (hubungan sudut yang terbentuk oleh garis-garis berpotongan) hingga merumuskan bahwa masalahnya adalah menemukan tiga sudut yang bersisian dan membentuk sudut lurus yang besarnya sesuai dengan ukuran masing-masing sudut segitiga. Sedangkan saat mulai mengerjakan T2, subyek telah memahami masalah seperti T1 tetapi dalam kondisi kerangka gambar penyelesaian yang berbeda dengan kerangka gambar penyelesaian T1. Penyelesaian T2 membantu subyek mengalami tahap proses berpikir lebih lanjut, yaitu tahap kelima: pembentukan makna: (1) merumuskan secara sederhana prosedur pengembangan bukti-bukti,

dan (2) merumuskan makna rangkaian bukti, kemudian melakukan tahap keenam: evaluasi bukti: (1) menyusun bukti lain, (2) memilih bukti yang lebih sederhana, dan (3) memeriksa kelengkapan semua bukti.

Tujuan pemberian tugas T3 yang utama bukan untuk mengetahui kemampuan subyek menyelesaikan tugas, tetapi menyiapkan kondisi agar dapat mengungkap apakah subyek telah memikirkan bukti “jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^0 ” sebagai prosep secara proseptual. Berikut adalah petikan wawancara dengan S1 sebelum menyelesaikan T3.

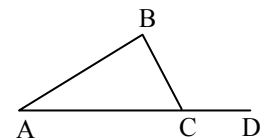
P : “Bagaimana kamu yakin benar (penyataan tugas 1) bagian a), oleh penulis)? Bisa kamu jelaskan?”

S1 : “Karena sudut A (menunjuk sudut BAC) ditambah sudut B (menunjuk sudut ABC) kan menghasilkan sudut ini (menunjuk sudut BCD)”.

.....

P : “Apa maksudnya?”

S1 : “Karena jika sudut A (menunjuk sudut A) ditambah dengan sudut B (menunjuk sudut B) kan menghasilkan sudut ini (menunjuk sudut BCD)”.



P : “Mengapa bisa menghasilkan sudut itu?”

S1 : “Karena jika sudut A (menunjuk sudut A), ditambah dengan sudut B (menunjuk sudut B) akan menghasilkan sudut ini (menunjuk sudut BCD) akan menghasilkan sudut lurus dengan C (menunjuk sudut C)”.

Penyelesaian tugas 3).b) dilakukan dengan membagi jajargenjang menjadi dua segitiga. Bagi subyek, jumlah besar sudut-sudut segitiga adalah 180^0 , maka jumlah besar sudut-sudut jajargenjang sama dengan dua kali jumlah besar sudut-sudut segitiga atau 360^0 . Berdasarkan analisis data, disimpulkan bahwa:

- 1) Proses bukti tugas T1 dan T2 bagi subyek adalah mencari sudut-sudut bersisian yang masing-masing sama dengan ukuran sudut-sudut segitiga dan membentuk sudut lurus. Menurut rumusan ini, subyek telah mengabstraksi prosedur yang kompleks. Subyek tidak terikat lagi dengan langkah melukis segitiga lebih dulu, kemudian melukis dua ruas garis yang dipotong oleh ruas garis lain, dan seterusnya. Subyek fokus pada proses menemukan tiga sudut saling berpelurus. Karena dalam bentuk abstraksi yang sederhana, bahkan subyek dapat menggunakan proses bukti tersebut menyelesaikan tugas lain (T3).
- 2) Konsep bukti yang dipahami subyek terbagi dua, yaitu makna secara geometri dan aritmatika. Secara geometri bermakna gabungan tiga sudut-sudut suatu segitiga membentuk sudut lurus, dan secara aritmatika bermakna jumlah ukuran sudut-sudut segitiga sama dengan 180^0 .
- 3) Ketika subyek mengatakan “jumlah besar sudut-sudut segitiga adalah 180^0 ”, secara fleksibel subyek bermaksud menyatakan atau merujuk silih berganti proses atau konsep bukti

teorema tersebut. Pada saat ini, teorema telah menjadi simbol yang menyatakan proses atau konsep bukti, dan subyek memikirkan proses dan konsep tersebut secara proseptual.

Berdasarkan hasil kerja dan wawancara terhadap S1 tersebut, disimpulkan bahwa subyek mengalami tahap berpikir lebih lanjut, yaitu tahap ketujuh: tahap prosep: (1) merumuskan proses bukti, (2) merumuskan konsep bukti, dan (3) memikirkan proses dan konsep bukti tersebut secara proseptual.

Data proses berpikir S2 tidak berbeda secara prinsipil dengan S1. Penyelesaian T1 oleh S2 terdiri dari 3 gambar, dimulai dengan mengidentifikasi data, mobilisasi dan organisasi data, merumuskan rencana dan mengaplikasikannya. Perbedaan terjadi pada tahap mobilisasi dan organisasi data. Setelah tahap identifikasi, S1 mengingat dan menerapkan pengetahuan relevan dengan masalah, dengan mengonstruksi 4 gambar (gambar 1.(i)-(iv), barulah subyek memahami konsepsi masalah, kemudian merumuskan rencana pembuktian. Sedangkan S2 sudah memahami konsepsi masalah sebelum mulai mengonstruksi gambar pertama. Tetapi tahap mobilisasi dan organisasi data proses berpikir S2 memenuhi karakteristik tahap berpikir S1. S2 mengingat pengetahuan hubungan sudut-sudut yang terbentuk oleh garis-garis berpotongan, mengingat bahwa sudut 180° adalah sudut lurus, mengadaptasikannya pada kondisi masalah, kemudian merumuskan konsepsi masalah bahwa masalah yang dihadapinya adalah mencari tiga sudut yang merupakan pelurus satu sama lain yang masing-masing besarnya sama dengan ukuran masing-masing sudut segitiga. Dengan demikian, perbedaan tersebut tidak prinsipil. S1 melakukan tahap mobilisasi dan organisasi data dengan tindakan langsung mengonstruksi gambar untuk memperjelas konsepsi masalah, sedangkan S2 melakukan tahap yang sama dengan proses berpikir dalam mental saja. Ada data lain yang menarik. Sama seperti S1, S2 belum memahami makna bukti setelah mengerjakan T1, tetapi telah memahami prosedur bukti yaitu *“pertama-tama gambar segitiga dulu (menunjuk gambar segitiga), menarik garis-garis (menunjuk perpanjangan sisi-sisi segitiga dalam gambar), lalu menentukan hubungan antar sudut-sudut, sampai ketemu sudut berpelurus”*.

Tugas kedua (T2) diselesaikan oleh S2 dalam 3 cara. Cara pertama berhasil pada gambar ketiga, penyelesaian kedua dalam satu gambar yang selesai dalam 43 detik, dan cara ketiga adalah penyelesaian yang paling sederhana. Berdasarkan data penelitian, subyek mengalami tahap proses berpikir lebih lanjut, yaitu tahap pembentukan makna dan evaluasi, dengan karakteristik yang sama dengan proses berpikir S1.

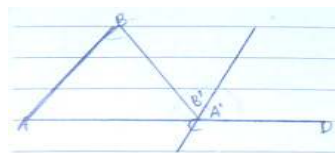
Tetapi berbeda dengan S1, S2 mencapai tahap prosep setelah menyelesaikan T3. Setelah menyelesaikan tugas, terungkap dalam wawancara hal-hal berikut.

P : “Perhatikan sekali lagi gambarmu (menunjuk Gambar 3). Pasti benarkah pernyataan pada soal?”

S2 : *Berpikir lama, kemudian berkata “Ya”*.

P : “Bagaimana bisa?”

S2 : “Segitiga sudut-sudutnya 180^0 . Ini sudut C (menunjuk sudut ACB). Sisanya ini kan membentuk sudut lurus (menunjuk sudut BCD), sama dengan sudut segitiganya”.



P : “Apa maksudnya?”

Gambar 3. Penyelesaian T3 bagian a) oleh S2

S2 : “Jumlahnya 180^0 ”.

Berdasarkan data penelitian, S2 memahami proses maupun konsep bukti, dan memikirkannya secara proseptual. Artinya ketika subyek menyatakan redaksi teorema “jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga 180^0 ”, subyek sedang merujuk silih berganti proses atau konsep bukti, baik makna secara geometri maupun aritmatik. Perbedaannya dengan S1, S2 mencapai tahap prosep setelah menyelesaikan T3, sedangkan S1 telah mencapai tahap tersebut sebelum menyelesaikan T3, yang terungkap ketika peneliti melakukan wawancara tentang rencana penyelesaian T3 menurut subyek.

Temuan lain adalah sifat kemajuan berpikir. S1 melakukan beberapa kali mobilisasi dan organisasi data sebelum merumuskan rencana pembuktian, selama subyek mengonstruksi gambar 1(i)-(iv). Artinya setelah melakukan mobilisasi dan organisasi data berdasarkan gambar 1.(i), subyek tidak langsung ke tahap merumuskan rencana pembuktian. Mudah dilihat juga bahwa kedua subyek mencapai tahap berpikir evaluasi setelah mengonstruksi beberapa bukti berbeda, dan setiap kali mengonstruksi bukti, subyek melakukan kegiatan berpikir tahap pertama sampai keempat. Berdasarkan fakta-fakta ini, disimpulkan bahwa proses berpikir mengonstruksi bukti sebagai prosep tidak selalu maju terus secara linier dari tahap identifikasi, ke tahap mobilisasi dan organisasi data, sampai ke tahap prosep, tetapi kembali beberapa kali ke tahap-tahap sebelumnya.

1. Pembahasan

Untuk memperjelas originalitas dan fungsi temuan penelitian, perlu dibahas dukungan dan perbedaannya dengan teori yang relevan. Ada beberapa teori tentang proses berpikir memecahkan masalah yang berkaitan dengan masalah membuktikan. Walaupun ada perbedaan, tahap-tahap berpikir pada teori-teori tersebut dapat disejajarkan satu sama lain. Berikut digambarkan kesejajaran tahap-tahap kemajuan berpikir memecahkan masalah untuk membuktikan oleh Polya, proses berpikir memahami simbol sebagai prosep oleh Gray dan Tall, proses memecahkan masalah oleh Kurlik dan Rudnick, dan Proses Berpikir Siswa SMP Mengonstruksi Bukti Visual/simbolik Geometri sebagai Prosep (PBSMBV/SsP) pada Diagram 1.

<i>Polya</i>	Gray-Tall	Krulik-Rudnick	<i>PBSMBV/SsP</i>
Mengidentifikasi data	Tahap prosedur	<i>Read and think</i>	Mengidentifikasi data
Mobilisasi/ organisasi		<i>Explore and plan</i>	Memobilisasi/ mengorganisasi
Merumuskan konsepsi		<i>Select a strategy</i>	Merumuskan rencana
Aplikasi rencana		<i>Find an answer</i>	Mengaplikasi rencana
<i>Looking back</i>	Tahap proses	<i>Reflect and extend</i>	Memberi makna
	Tahap prosep		Mengevaluasi

Diagram 1. Teori Polya, Gray-Tall, Krulik-Rudnick, dan PBSMBV/SsP

Hasil penelitian yang telah dijelaskan menunjukkan bahwa pengonstruksian bukti sebagai prosep dalam pembelajaran terdiri dari tujuh tahap. Tahap pertama sampai keenam hampir paralel dengan kemajuan berpikir untuk membuktikan menurut Polya (1973; 1981) maupun Krulik dan Rudnick (1995). Polya menjelaskan bahwa kemajuan berpikir untuk membuktikan dimulai dengan tahap identifikasi, mobilisasi dan organisasi, pembentukan dan perubahan konsepsi tentang masalah, aplikasi dan melihat kembali (*looking back*). Perumusan konsepsi masalah dipandang sebagai perumusan masalah dan langkah-langkah pembuktian. Sedangkan pembentukan makna tidak dipandang sebagai suatu tahap proses berpikir, tetapi dipandang menyatu dengan kemajuan berpikir untuk membuktikan. Berbeda dengan pandangan Polya, menurut data penelitian, terutama terhadap S1, pembentukan konsepsi tentang masalah merupakan akumulasi mobilisasi dan organisasi data (gambar i-iv). Setelah mobilisasi dan organisasi data sejak gambar i, barulah pada gambar iv S1 menyadari bahwa masalah yang dihadapinya (T1) adalah mencari tiga sudut yang membentuk sudut lurus dan berukuran sama dengan masing-masing sudut segitiga. Berdasarkan konsepsi inilah S1 merumuskan rencana atau langkah-langkah pembuktian, dan mengaplikasikannya pada gambar v.

Pembentukan makna juga menarik perhatian. Berbeda dengan pandangan Polya, hasil penelitian menunjukkan bahwa pembentukan makna merupakan satu tahap tersendiri. Walaupun S1 mampu mengonstruksi bukti berdasarkan tugas T1 dan menjelaskan maksudnya, tetapi dalam wawancara berdasarkan penyelesaian T1, S1 hanya mampu merumuskan prosedur penyusunan bukti, tetapi belum menyadari maknanya. Setelah peneliti mewawancarai S1 tentang langkah-langkah penyelesaian tugas T2 dan memintanya merumuskan makna dari bukti yang disusunnya, barulah subjek mampu merumuskan makna

rangkaian bukti dan menyederhanakan prosedur-prosedur dari seluruh penyelesaian yang berhasil dia susun. Hal ini menunjukkan bahwa seseorang memerlukan waktu untuk memahami makna bukti yang ada. Rumusan hasil penelitian ini menjawab dengan tegas fenomena “mengapa ada yang mampu mengonstruksi bukti tetapi kurang atau tidak memahami makna bukti yang disusunya”. Hasil penelitian ini memberi penjelasan dengan gamblang, “tahap memberi makna terabaikan”. Hasil penelitian ini juga mengamanatkan hal yang penting, bahwa pembentukan makna merupakan kegiatan yang perlu diberi waktu yang cukup, suatu tahap penting dalam pengonstruksian bukti dalam pembelajaran, agar siswa memahami bukti yang dikonstruksinya.

Hal lain yang menarik adalah tahap prosep. Polya maupun Krulik dan Rudnick tidak menjelaskan tahap ini. Tetapi Gray dan Tall (1994), dan Tall (1992; 1995) merumuskan bahwa tahap prosep merupakan tahap proses berpikir yang memberi hasil belajar yang lebih sukses. Hasil penelitian sesuai dengan pendapat Gray-Tall. Pada tahap prosep, makna rangkaian bukti maupun langkah-langkah pengonstruksian bukti yang kompleks diabstraksi hingga menjadi sederhana. Misalnya prosedur penyelesaian T1 oleh S1 “*pertama-tama gambar segitiga dulu (menunjuk gambar segitiga), menarik garis-garis (menunjuk perpanjangan sisi-sisi segitiga dalam gambar), lalu menentukan hubungan antar sudut-sudut, sampai ketemu sudut berpelurus*” dienkapsulasi menjadi proses, dengan mengabstraksi prosedur tersebut menjadi “*menggambar sudut-sudut bersisian yang berukuran sama dengan bangun sesuai data*”. Dengan proses ini, prosedur menjadi sederhana, dan dapat diterapkan bukan hanya pada segitiga lain, juga pada jajargenjang, misalnya tugas T3. Karena bentuk yang sederhana, seseorang yang mampu memikirkan prosep secara proseptual, mampu memikirkan secara fleksibel berpindah-pindah dalam suatu waktu dari proses ke konsep atau sebaliknya, seperti satu item pengetahuan. Karena sederhana, prosep dapat diterapkan pada masalah-masalah baru, tidak hanya pada masalah rutin. Hal ini menjelaskan “mengapa ada yang mampu mengonstruksi bukti suatu teorema dan memahami maknanya, tetapi gagal menggunakannya menyelesaikan masalah-masalah matematika”. Hal ini terjadi karena mereka belum memahami bukti sebagai prosep, dan belum mampu memikirkannya secara proseptual.

Untuk sukses, seseorang harus mencapai tahap prosep. Pada tahap prosep, seseorang memiliki pengetahuan prosedural yaitu proses bukti yang dapat dilakukan, dan pengetahuan konseptual yaitu konsep bukti yang dapat dipikirkan dan dimanipulasi pada proses berpikir lebih lanjut. Proses dan konsep tersebut dipahami dalam bentuknya yang sederhana, sehingga dapat dipikirkan sebagai satu item pengetahuan dalam suatu waktu, dan dapat digunakan sebagai satu langkah saja dalam proses berpikir matematika selanjutnya. Hal ini sesuai dengan pendapat Crowley, dkk pada matematika simbolik. Crowley, dkk menjelaskan, “*We believe that procepts are at the root of human ability to manipulate mathematical ideas in arithmetic, algebra and other theories involving manipulable symbols. They allow the biological brain to*

switch effortlessly from doing a process to thinking about a concept in a minimal way". (Crowley, dkk, 2001, 85).

Hal yang baru dalam hasil penelitian ini adalah memandang bukti informal geometri sebagai prosep. Pengonstruksian bukti sebagai prosep tidak berakhir pada penyusunan bukti teorema, tetapi dilanjutkan memahami proses maupun konsep yang dikandungnya, hingga proses dan konsep tersebut dapat dipikirkan secara proseptual.

Hasil penelitian ini menjelaskan bahwa pemahaman tentang teorema sebaiknya dibangun melalui pemahaman buktinya. Makna konseptual teorema lebih tepat dibangun melalui pemahaman proses bukti teorema, dan konsep maupun proses bukti masing-masing mengembangkan pengetahuan dan kompetensi dalam belajar. Teorema yang dipelajari akan menjadi unit berpikir matematik yang sukses, jika buktinya dipandang sebagai prosep dan dapat dipikirkan secara proseptual. Oleh karena itu, baik proses maupun konsep bukti sebaiknya tidak diabaikan, dan dipelajari tanpa memisahkannya. Selain itu, memandang bukti sebagai prosep, memberi tantangan berpikir lebih tinggi, tidak sekedar memahami proses dan konsep bukti teorema, tetapi memahami keduanya secara proseptual. Hasil penelitian ini juga menunjukkan bahwa memandang bukti sebagai prosep dan memikirkannya secara proseptual dapat diterapkan kepada mereka yang mampu mengonstruksi bukti visual/symbolik. Sebagai rumusan teoritis, hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai acuan merancang pembelajaran geometri. Agar berhasil optimal, penggunaan PBSMBV/SsP dalam pendidikan, terutama dalam kelas matematika, dapat dipadukan dengan teori lain yang relevan.

Walaupun peneliti telah berupaya secara sistematis, objektif dan sungguh-sungguh melakukan dan merumuskan hasil penelitian ini, tetapi masih memiliki keterbatasan. Penelitian ini hanya didasarkan pada eksplorasi proses berpikir siswa ketika mengonstruksi bukti suatu teorema yang belum pernah diselesaikannya, hingga mampu memikirkan bukti tersebut sebagai prosep secara proseptual, tanpa mempertimbangkan faktor-faktor lain yang mungkin mempengaruhi hasil belajar. Bidang kajian penelitian ini masih terbatas, baik dari segi kajian teoritis, representasi bukti, pemilihan subjek dan materi penelitian. Untuk memperoleh hasil yang menjangkau faktor lebih luas, perlu ditindaklanjuti dengan penelitian lanjutan.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Bukti visual/symbolik yang dikonstruksi oleh siswa SMP dapat dipandang sebagai prosep. Proses berpikir siswa SMP mengonstruksi bukti visual/symbolik tersebut sebagai prosep dilakukan dalam tujuh tahap, yaitu: mengidentifikasi, mobilisasi dan organisasi data, merumuskan rencana, mengaplikasikan rencana, membentuk makna, mengevaluasi, dan tahap prosep. Kemajuan berpikir mengonstruksi bukti sebagai prosep tidak selalu maju terus secara

linier dari tahap identifikasi, ke tahap mobilisasi dan organisasi data, sampai ke tahap prosep, tetapi kembali beberapa kali ke tahap-tahap sebelumnya.

Saran

Untuk memaksimalkan hasil belajar, pembelajaran tentang teorema geometri bagi siswa SMP sebaiknya mempertimbangkan cara pandang dan hasil penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Crowley, L., DeMarois, P., Gray, E., Maselan Bin Ali, McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Tall, D., Thomas, M., Yusof, Y. (2001). "Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking". *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 1, 81–104.
- Davis, G., Gray, E., Simpson, A., Tall, D., Thomas, M. (2000). "What is the Object of the Encapsulation of a Process?" <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000a-objec-encap-jmb.pdf>, diakses 28 April 2011
- De Villiers, M. (1999). "The Role and Function of Proof with Sketchpad". mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proof.pdf, diakses 2 Desember 2011
- De Walle, J. A. (1990). *Elementary School Mathematics. Teaching Developmentally*. New York: Longman.
- Erh-Tsung Chin.(2003). "Mathematical Proof as Formal Procept in Advanced Mathematical Thinking". http://online.terc.edu/PME2003/PDF/RR_chin.pdf, diakses 4 April 2009
- Arnon, dkk., (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Ebook. Springer Science + Business Media New York.
- Fuys, D., Geddes, D., and Tischer, R. (1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph no. 3*. Reston : NCTM.
- Gray, Eddie dan Tall, David. (1994). "Duality, Ambiguity and Flexibility : A Proceptual View of Simple Arithmetic". *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 115-141.
- Heinze, A., dan Kwak, Jee Yi. (2002). "Informal Prerequisites for Informal Proof". In *International Reviews on Mathematical Education (ZDM)*. Vol. 34. Issue 1 (Analysis). Hal 9-16.
- Hemmi, K., Lepik, M., Viholainen, A. (2010). "Upper Secondary School Teachers' Views of Proof and Proving- an Explorative Cross-Cultural Study". *Proceeding of the 16th Conference on Mathematical Views*. Tallinn, Estonia.
- Knuth, E. J. (2002). "Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics". *Journal of Mathematics Teacher Education*. Vol. 5. Hal. 61-82.
- Krulick, S. dan Rudnick, J. A. (1995). *The New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving in Elementary School*. Boston: Allyn and Bacon

- Moore, Robert C. (1994). "Making the Transition to Formal Proof". *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 27. Hal 249-266.
- Ndraha, Faaso, (2011). Proses Berpikir Mengonstruksi Bukti Geometri sebagai Prosep Berdasarkan Teori Gray-Tall dan Polya. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2011*, Surabaya: Universitas Negeri Surabaya.
- Ndraha, Faaso, (2015). *Proses Berpikir Siswa SMP Mengonstruksi Bukti Informal Geometri sebagai Prosep*. Disertasi. Tidak Diterbitkan. Program Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya.
- O'Daffer, P. G. dan Thornquist, Bruce A. (1993). "Critical Thinking, Mathematical Reasoning, and Proof". Dalam Patricia S. Wilson (ed). *Research Ideas for the Classroom: High School*. New York: MacMillan Publishing Co.
- Piaget, J. (1971). *Genetic Epistemology*. New York: Columbia University Press.
- Piaget, J. (1985). *The Equilibrium of Cognitive Structures*. Cambridge: Havard University Press.
- Polya, George. (1973). *How to Solve It A New Aspect of Mathematical Method*. 2th ed. New Jersey: Princeton University Press.
- Polya, George. (1981). *Mathematical Discovery*. New York: John Wiley & Sons. Inc.
- Soedjadi, R. (2000). *Kiat-kiat Pendidikan Matematika di Indonesia*. Jakarta: Dirjen Dikti Departemen Pendidikan Nasional.
- Sunardi, (2000). Tingkat Perkembangan Konsep Geometri Siswa Kelas III SLTP Negeri di Jember. Sriwulan Adji dan Janson Naiborhu (eds). *Prosiding Konferensi Nasional Matematika X, Institut Teknologi Bandung*, 6(5), hal. 635-639. Bandung: ITB
- Tall, David. (1992). "Construction of Objects through Definition and Proof". *Proceedings of PME Working Group on Advanced Mathematical Thinking*. Durham. <http://warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992m-constr-def-amt.pdf>, diakses 14 Juni 2010.
- Tall, David, (1995). *Cognitive Development, Representations, and Proof*. Makalah pada Konferensi Justifying and Proving in School Mathematics, Institute of Education, London, Desember 1995. <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1995-repns-proof.pdf>, diakses 14 Juni 2010.
- Tall, David, (1997). "From School to University: The Effects of Learning Styles in the Transition from Elementary to Advanced Mathematical Thinking". In Thomas, M. O. J. (Ed.) *Proceedings of The Seventh Annual Australasian Bridging Network Mathematics Conference*, University of Auckland, 9-26
- Velleman, Daniel J. (2009). *How to Proof It A Structured Approach*. 2th ed. New York: Cambridge University Press.
- Vinner, S. (2002). "The Role of Definition in the Teaching and Learning Mathematics". Dalam D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Hal. 65-81. Kluwer: Dordrecht.