APLIKASI METODE BEDA HINGGA SKEMA EKSPLISIT PADA PERSAMAAN KONDUKSI PANAS

Bambang Agus Sulistyono

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UNP Kediri

bb7agus1@gmail.com

Abstrak

Paper ini mengkaji bentuk numerik dari persamaan konduksi panas yang model matematikanya berbentuk persamaan diferensial parsial tipe parabolik dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit. Dikaji pula stabilitas skema tersebut dengan cara mengambil beberapa nilai Δt. Dari kajian ini diperoleh bahwa skema eksplisit akan memberikan hasil yang baik (stabil) bila Δt cukup kecil atau kondisi hitungan akan stabil bila nilai $0 < \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2}$.

Kata kunci: pdp parabolik, metode beda hingga, skema eksplisit, stabilitas

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung fungsi dan turunannya yang tidak diketahui. Jika terdapat satu variabel bebas dan turunannya merupakan turunan biasa maka disebut dengan persamaan diferensial biasa, dan jika terdapat dua atau lebih variabel bebas dan turunannya adalah turunan parsial maka persamaannya disebut dengan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial menurut nilai koefisiennya dibedakan atas tiga persamaan, yaitu persamaan parabolik, persamaan eliptik, dan persamaan hiperbolik.

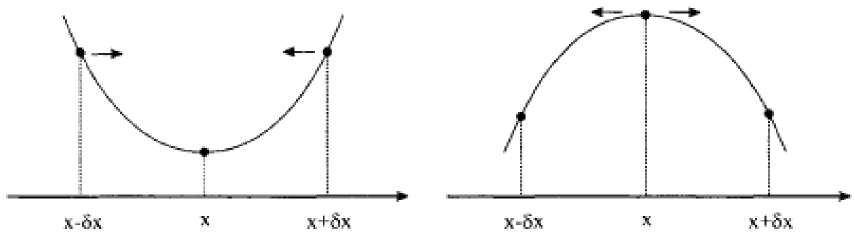
Kebanyakan permasalahan dalam ilmu pengetahuan dan teknologi dapat dipresentasikan dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Persamaan tersebut memegang peranan penting di dalam penggambaran keadaan fisis, dimana besaran-besaran yang terlibat didalamnya berubah terhadap ruang dan waktu.

Persamaan parabolik biasanya merupakan persamaan yang tergantung pada waktu (tidak permanen). Penyelesaian persamaan tersebut memerlukan kondisi awal dan batas. Persamaan eliptik biasanya berhubungan dengan masalah keseimbangan atau kondisi permanen (tidak tergantung waktu), dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas di sekeliling daerah tinjauan. Persamaan hiperbola biasanya berhubungan dengan getaran, atau permasalahan di mana terjadi ketidak-kontinyuan dalam waktu, seperti gelombang kejut yang terjadi ketidak-kontinyuan dalam kecepatan, tekanan dan rapat massa. Penyelesaian dari persamaan hiperbolik mirip dengan penyelesaian persamaan parabola.

Dalam paper ini akan dikaji bentuk numerik dari persamaan konduksi panas yang model matematikanya berbentuk persamaan diferensial parsial tipe parabolik dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit. Pada skema eksplisit, variabel (temperatur) pada suatu titik dihitung secara langsung dari beberapa variabel di beberapa titik di sekitarnya pada waktu sebelumnya, yang sudah diketahui nilainya. Dengan metode ini, penurunan persamaan diferensial ke dalam bentuk beda hingga adalah mudah, namun kendala utamanya adalah kemungkinan terjadinya ketidakstabilan hitungan. Oleh karena itu dikaji pula stabilitas skema eksplisit dengan cara mengambil beberapa nilai dari Δt.

PERSAMAAN KONDUKSI PANAS

Perhatikan tafsiran grafis secara intuisi aliran panas yang melalui medium padat berikut ini:



Gambar 1. Tafsiran secara intuisi aliran panas

Panas mengalir dari benda bertemperatur lebih tinggi ke benda bertemperatur lebih rendah. Laju perpindahan panas yang melewati benda padat sebanding dengan gradien temperatur atau beda temperatur persatuan panjang.

L

A B

perambatan panas

Gambar 2. Perambatan panas pada batang logam

Jika sebuah elemen batang logamyang panjang dan tipis dipanaskan pada salah satu ujungnya, sedang ujung yang lain adalah tetap, seperti ditunjukkan dalam Gambar 2, maka dapat diturunkan suatu persamaan untuk memprediksi panas/temperatur yang merambat pada batang dari ujung A ke ujung B dalam suatu interval waktu tertentu (Δt). Dengan menggunakan prinsip keseimbangan *input-output=panas yang di serap*, maka dapat dituliskan persamaan:

$$q(x)\Delta y\Delta z\Delta t - q(x+\Delta t)\Delta y\Delta z\Delta t = \Delta x\Delta y\Delta z\rho C\Delta T \qquad (1)$$

membagi persamaan (1) dengan volume dari elemen ($\Delta x\Delta y\Delta z$) dan Δt,

$$\frac{q(x) - q(x+\Delta t)}{\Delta x} = \rho C\frac{\Delta T}{\Delta t} \qquad (2)$$

dengan mengambil limitnya, diperoleh bentuk:

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (3)$$

dan dari hukum konduksi panas Fourier, maka dihasilkan persamaan konduksi panas sebagai berikut:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (4)$$

dengan *T*adalah temperatur, *K*adalah koefisien konduktifitas, *t*adalah waktu dan *x* adalah jarak (ruang).

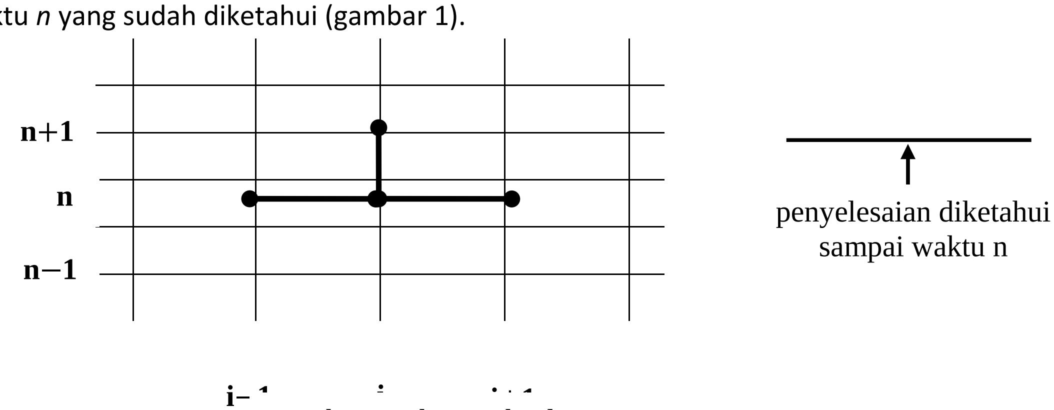
Persamaan (4) berlaku untuk daerah $0 < x < L$ dan $0 < t < \tau$, dengan τ adalah waktu hitungan total, sedangkan kondisi awal dan batas adalah

$$\begin{aligned} &T(x,0) = f(x) && ;0 \le x \le L \\ &T(0,t) = g_0(t) && ;0 < t \le \tau \qquad (5) \\ &T(L,t) = g_1(t) && ;0 < t \le \tau \end{aligned}$$

Dalam persamaan (5), $T(x,0)$ adalah kondisi awal sedangkan $g_0(t)$ dan $g_1(t)$ adalah kondisi batas.

METODE BEDA HINGGA SKEMA EKSPLISIT

Penyelesaian persamaan tipe parabolik dengan menggunakan metode beda hingga dapat dibedakan menjadi dua metode (skema) dasar, yaitu skema eksplisit dan skema implisit. Pada skema eksplisit, variabel pada waktu *n*+1, dihitung berdasarkan variabel pada waktu *n* yang sudah diketahui (gambar 1).



Gambar 3. Skema eksplisit

Dengan menggunakan skema seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3, fungsi variabel (temperatur) *T*(*x,t*) dan turunannya dalam ruang dan waktu didekati oleh bentuk berikut:

$$T(x,t) = T_i$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Dengan menggunakan skema di atas, Persamaan (4) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = K_i \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{K_i \Delta t}{\Delta x^2}(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \qquad (6)$$

Penyelesaian Persamaan (4) dan (5) terhadap batang logam yang dipanaskan (*AB*) dilakukan dengan membagi batang logam tersebut menjadi sejumlah pias. Selanjutnya dibuat jaringan titik hitungan dalam bidang *x-t*. Jarak antara titik hitungan (panjang pias) adalah $\Delta x = L/M$, dengan *M* adalah jumlah pias sedang interval waktu hitungan adalah Δt. Dengan Persamaan (6) dan kondisi batas di kedua ujung batang, memungkinkan untuk menghitung T_i^{n+1} (*i*= 1, 2, ..., *M*-1) berdasarkan nilai T_i^n (*i*= 1, 2, ..., *M*) yang telah diketahui.

Pada awal hitungan, nilai awal dari temperatur T_i^0 diketahui sebagai kondisi awal. Dari nilai awal tersebut dan kondisi batas, dapat dihitung nilai *T* di sepanjang batang logam (*i*= 1, 2, ..., *M*) pada waktu berikutnya. Nilai yang telah dihitung tersebut digunakan untuk menghitung T_i (*i*= 1, 2, ..., *M*) untuk waktu berikutnya lagi. Prosedur hitungan ini diulangi lagi sampai akhirnya di dapat nilai T_i (*i*= 1, 2, ..., *M*) untuk semua nilai waktu.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penerapan metode beda hingga skema eksplisit pada persamaan konduksi panas satu dimensi dapat dilakukan dengan memberikan sebuah contoh kasussebagai berikut, diberikan sebuah batang logam yang pada kedua ujungnya dipertahankan temperaturnya konstan yaitu 0^0C. Akan dicari penyebaran temperatur disepanjang batang logam dan untuk setiap langkah waktu. Secara matematis permasalahan tersebut dapat digamabrkan sebagai penyelesaian numerik dari persamaan:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

yang memenuhi kondisi awal

$$T(x,0) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 2(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

Dann kondisi batas

$$T(0,t) = T(1,t) = 0 \qquad \forall t.$$

Dalam kasus ini dianggap bahwa K $= 1$, sehingga bentuk persamaan beda hingga skema eksplisit (Persamaan 6) menjadi:

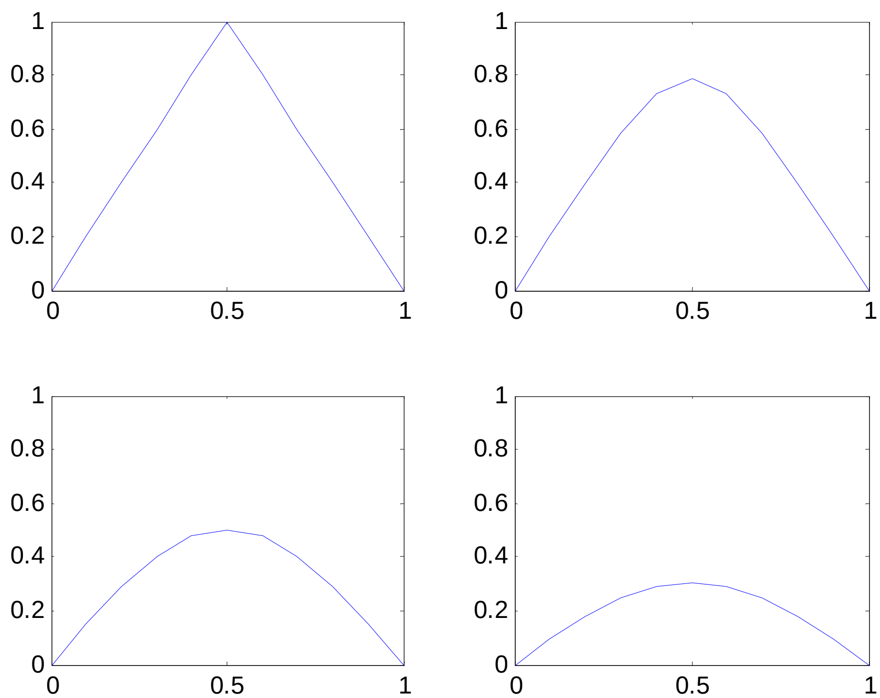
$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$$

atau

$$T_i^{n+1} = \rho T_{i-1}^n + (1-2\rho)T_i^n + \rho T_{i+1}^n \qquad (7)$$

dengan $\rho = \Delta t / \Delta x^2$

Perhitungan dilakukan menggunakan Matlab terhadap Persamaan 7 dengan mengambil beberapa keadaan, yaitu $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.001$, dan hasil plot untuk $t = 0, 10\Delta t, 50\Delta t,\ 100\Delta t$ adalah sebagai berikut:

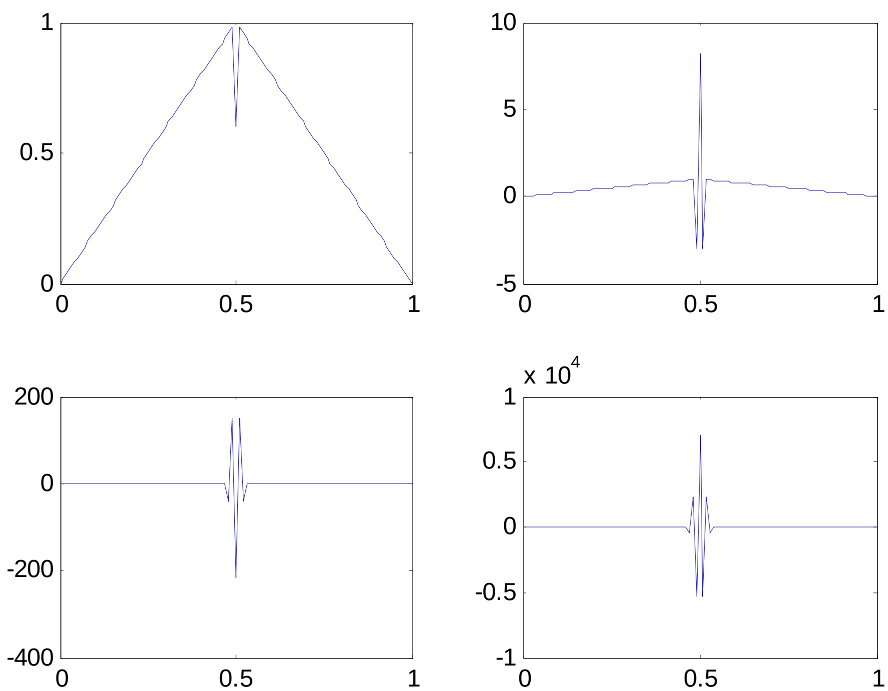


Gambar 4 Solusi numerik dari persamaan konduksi

Berdasarkan hasil dari plot dalam Gambar 4 dengan $\rho = 0.1$menunjukkan bahwa perubahan temperatur dari waktu ke waktu terjadi secara berangsur-angsur. Hal ini sesuai dengan kondisi fisik dan mencerminkan kondisi yang terjadi di alam.

Selanjutnya dilakukan perhitungan menggunakan Matlab dengan mengambil beberapa keadaan yang lain yaitu $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.001$, dan hasil plot untuk $t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t,\ 4\Delta t$ adalah sebagai berikut:

Berdasarkan hasil dari plot dalam Gambar 5 dengan $\rho = 1$ menunjukkan bahwa perubahan temperatur dari waktu ke waktu tidak terjadi secara berangsur-angsur. Dibeberapa titik hitungan terjadi temperatur melebihi temperatur awal dan juga terjadi nilai negatif. Secara fisik perubahan semacam itu tidak benar dan hasil hitungan tidak mencerminkan kondisi yang terjadi di alam. Hal ini disebabkan karena adanya ketidakstabilan hitungan pada kondisi tersebut.



Gambar 5 Ketidakstabilan solusi persamaan konduksi panas dengan skema eksplisit.

Hasil diatas sesuai dengan teori yang mengatakan agar perhitungan dengan skema eksplisit ini konvergen dan stabil, maka besarnya delta t harus diambil sedemikian rupa sehingga memenuhi

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2K}$$

apabila tidak memenuhi maka hitungan menjadi tidak stabil.

SIMPULAN

Dari hasil penelitian ini diperoleh kenyataan bahwa distribusi temperatur pada sebatang logam panjang dan tipis mengikuti fungsi parabolik dengan temperatur maksimum berada dibagian tengah dan temperatur berubah terhadap waktu. Dari kajian ini pula diperoleh bahwa skema eksplisit akan memberikan hasil yang baik (stabil) bila Δt cukup kecil atau kondisi hitungan akan stabil bila nilai $0 < \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2}$.

DAFTAR PUSTAKA

Triatmodjo, B, (2002) *Metode Numerik dilengkapi dengan program komputer,* Penerbit Beta Offset.

Paolo, B. (2006) *Numerical Methods in Finance and Economics A MATLAB-Based Introduction,* John Wiley & Sons, Inc.

Ibrahim,KI. dan Hisyam, A. (2003) *Metode Numerik untuk Sains dan Teknik dengan Matlab,* UAD Press.