

# Pemodelan Matematika Dari Pergerakan Mangsa Dan Pemangsa Melalui *Optimal Control*

Niska Shofia

Jurusan Teknik Informatika, Fakultas Teknik, Universitas Nusantara PGRI Kediri  
Jalan K.H.Ahmad Dahlan No. 76 Kediri  
[mail\\_niez@yahoo.co.id](mailto:mail_niez@yahoo.co.id)

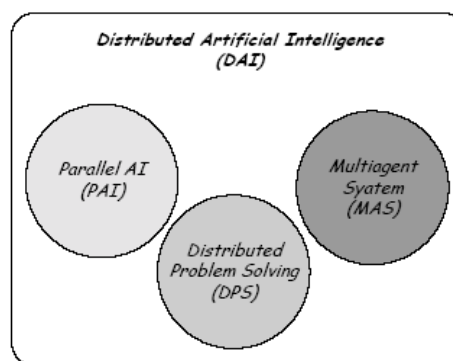
**Abstrak**— Pesaratnya perkembangan teknologi menyebabkan teknologi *agent* dan *multi agent system* dengan mudah bisa diimplementasikan, sehingga saat ini bukan hanya bergerak dalam kerangka penelitian, tetapi juga telah sampai pada tahap implementasi nyata. Alur pergerakan dari masing-masing agent diatur oleh sistem kontrol yang *independent*. Pada penelitian ini, *multi agent* sistem tersebut diterapkan dalam pergerakan mangsa dan pemangsanya antara dua kucing dan dua tikus. Tujuan dari sistem ini adalah mendapatkan energi minimum dengan waktu optimum yang dibutuhkan untuk mendapatkan mangsanya. Dengan menggunakan metode dari *optimal control* yaitu metode *Pontryagin Maximum Principle* dengan fungsi Hamilton diperoleh hasil *Performance index*.

**Kata Kunci**—agent, *multy agent* sistem (MAS), *optimal control*, fungsi Hamilton.

## I. PENDAHULUAN

Berdasarkan kamus Webster's New World Dictionary [Guralnik, 1983], *Multi Agent System (MAS)* adalah suatu komunitas sistem dimana terdapat beberapa *agent* yang saling berinteraksi, bernegosiasi dan berkoordinasi satu sama lain dalam menjalankan suatu pekerjaan [1]. Berawal dari penelitian suatu cabang ilmu *Artificial Intelligence (AI)* lahirlah cabang ilmu besar yang bernama *Distributed Artificial*

*Intelegent (DAI)* yang membawahi 3 bidang penelitian salah satunya adalah *Multy Agent System (MAS)*. [1]



Gambar 1. Ruang Lingkup DAI

Pesaratnya perkembangan teknologi menyebabkan teknologi *agent* dan *multi agent system* dengan mudah bisa diimplementasikan, sehingga saat ini bukan hanya bergerak dalam kerangka penelitian, tetapi juga telah sampai pada tahap implementasi nyata. Saat ini teknologi *agent* sudah diaplikasikan secara luas di berbagai bidang, antara lain: *Air Traffic Control, Transportation System*, penerapan *Ant Colony System (ACS)* untuk mencari solusi optimal pada *Traveling Salesman Problem (TPS)* (Wahono, 2001). Bigus dalam bukunya [Bigus et al, 2001] menyebutkan secara ekstrim bahwa kita sedang melakukan transisi dari AI (*Artificial Intelegent*) ke IA (*Intelegent Agent*), sehingga segala permasalahan nyata yang berkaitan dengan *multi agent system* sangat menarik untuk dibahas [1], salah satunya adalah tentang pergerakan hewan pemangsa yang dilakukan untuk mencari mangsanya.

*Optimal control system* merupakan sebuah sistem yang terdiri atas satu atau beberapa peralatan yang berfungsi untuk mengendalikan sistem lain yang berhubungan dengan sebuah proses untuk mendapatkan hasil paling baik yang dapat dicapai dengan memperhatikan kondisi dan

kendala pada sistem tersebut (Hasan, 1998). Dalam *optimal control system*, istilah optimal seringkali merujuk pada minimal. Misalnya meminimalkan energi, *input*, waktu, kesalahan dll.

Supaya sistem tersebut dapat dikontrol, maka perlu dibuat model matematis yang menghubungkan antara *input*, proses, dan *output*. Pada *optimal control system*, model yang banyak digunakan adalah model persamaan keadaan.

*Multi Agent System* dengan *optimal control* merupakan suatu metode untuk menganalisis suatu model sistem yang dapat digunakan untuk mengoptimalkan hal-hal yang berhubungan dengan sistem tersebut [2], misalnya untuk mengoptimalkan energi dengan waktu optimum dari pergerakan hewan pemangsa untuk mendapatkan mangsanya. Banyaknya anggota *agent* dari sistem menjadi masalah pada *multi agent system* ini. Salah satu metode dari *optimal control* yang sering digunakan untuk mendapatkan hasil optimum yang diinginkan adalah metode *Hamiltonian*.

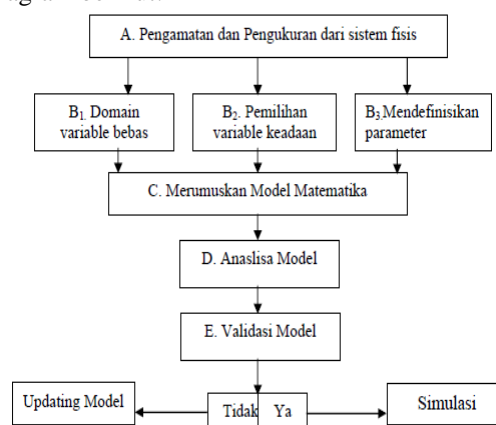
## II. METODE PENELITIAN

Study Literatur mengenai *multi agent system*, model sistem, *optimal control*, *Pontryagin Maximum Principle*, fungsi *Hamiltonian*, dan konsep dasar aljabar linear yang terkait. Mengkaji *Multi Agent System* dan mendapatkan model dari sistem dan berikutnya adalah membuat model dari pergerakan mangsa antara dua kucing dan dua tikus dengan mempelajari dan menguraikan teori dan cara-cara membuat model matematika dari suatu sistem. Menentukan *optimal control* pada sistem dengan membangun *performance index*. Menyelesaikan fungsi Hamilton agar menemukan kontrol masing-masing *agent*, persamaan *state* dan *costate* sehingga dapat meminimumkan energi dengan waktu optimum yang dibutuhkan pemangsa sampai mendapatkan mangsanya.

## III. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada artikel ini akan dianalisis mengenai model dari pergerakan mangsa dan pemangsa antara dua kucing dan dua tikus dengan beberapa batasan antara lain (1) Kucing 1

mengejar tikus 1 dan kucing 2 mengejar tikus 2, (2) dalam proses pemburu mangsanya tersebut tidak menggunakan alat bantu, dan (3) metode *optimal control* yang digunakan adalah dengan metode *Hamiltonian*. Dalam upaya pembuatan model matematika dari masalah nyata yakni masalah perburuan mangsa, diusahakan "menterjemahkan" masalah kedalam suatu model matematika melalui serangkaian asumsi, tahap-tahap utama yang dilalui dapat digambarkan dalam diagram berikut:



Gambar 2. Diagram Pemodelan

Tahap-tahap yang umum dalam Pengembangan suatu model adalah:

1. Sistem fisis dapat diamati dan dipelajari fenomenanya secara baik agar diperoleh suatu pengetahuan dari sistem tersebut. Ini diperoleh melalui percobaan dan peralatan yang sesuai dengan desain sistemnya.
2. Dengan menggunakan analisa, interpretasi dan prediksi dari sifat-sifat sistem yang diamati tadi akan ditentukan variabel bebas, variabe keadaan dan parameternya.
3. Formulasi model, yaitu proses merumuskan perilaku model, dan hubungan antar variabel. Interaksi antar variabel yang kompleks sering disederhanakan dengan menggunakan asumsi yang tepat.
4. Analisis dan solusi model. Model akan menghasilkan alternatif solusi sesuai dengan skenario yang kita buat.
5. Validasi model, yaitu tahap pengujian keakuratan model dengan membandingkan perilaku model dan perilaku sistem nyata.

Hasil model yang dirasa kurang tepat, perlu dijalankan ulang (biasanya menggunakan komputer), sampai tercapai solusi yang memuaskan. Proses ini dikenal dengan simulasi model.

Masalah nyata yang dihadapi salah satunya adalah masalah pergerakan mangsa dan pemangsa yang akan dibahas dalam artikel ini. Untuk itu diusahakan mendefinisikan masalah kedalam suatu model matematika melalui serangkaian asumsi. Selanjutnya dilakukan identifikasi variabel-variabel yang berkaitan dengan masalah dan mencoba merumuskan hubungan antara variabel-variabel tersebut, sehingga dapat digunakan untuk membangun model matematika kemudian dapat diselesaikan dengan menggunakan *Optimal Control*.

Sebelum mengetahui lebih lanjut tentang *optimal control*, terlebih dahulu kita ketahui tentang *swarm modelling*. *Swarm* adalah fenomena alam yang terjadi pada sekelompok hewan yang saling bekerjasama untuk mencapai suatu tujuan.

Masing-masing anggota *swarm* disebut *agent* yang bergerak menurut *control system*-nya [2]. Dengan *Swarm Modeling* ini telah diteliti simulasi model *swarm* antara 2 partikel menggunakan *optimal control* dengan metode *Hamiltonian* dan *Pontryagin Maximum Principle*, sehingga diperoleh *optimum trayektorinya* dengan *functional cost*:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T -\delta u_1^2 - \delta u_2^2 - \frac{\gamma}{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} dt$$

*Optimal control system* merupakan sebuah sistem yang terdiri atas satu atau beberapa peralatan yang berfungsi untuk mengendalikan sistem lain yang berhubungan dengan sebuah proses untuk mendapatkan hasil paling baik yang dapat dicapai dengan memperhatikan kondisi dan kendala pada sistem tersebut [16]

(Hasan, 1998). Dalam *optimal control system*, istilah optimal seringkali merujuk pada minimal. Misalnya meminimalkan energi, input, waktu, kesalahan dll. Sistem kontrol yang baik adalah sistem kontrol yang mempunyai daya tanggap yang cepat dan stabil, tetapi tidak memerlukan energi yang berlebihan dan dapat dicapai melalui pengaturan *performance index* yang tepat. (Hasan, 1998). *Performance index* suatu

*optimal control system* merupakan indikator dari kumpulan deviasi suatu sistem dari keadaan ideal atau keadaan yang diinginkan. Pada *optimal control system*, optimasi kontrol pada umumnya dicapai dengan meminimalkan nilai *performance index*.

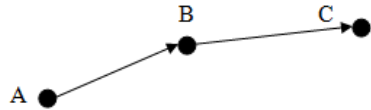
Persamaan pergerakan mangsa dan pemangsa merupakan persamaan keadaan non-linier. Untuk mengoptimalkan energi gerakannya maka dapat digunakan persamaan Hamilton Pontryagin. Persamaan Hamilton Pontryagin dapat digunakan untuk mengoptimalkan sistem proses yang bersifat kompleks dengan banyak kendala. Persamaan Hamilton Pontryagin juga dapat digunakan untuk mengoptimalkan sistem proses yang bersifat linier maupun non-linier. Bentuk tabel pengendalian optimalnya adalah sbb:

- Model System :  
 $\dot{x} = f(x, u, t)$
- Persamaan Hamiltonian :  
 $H(x, u, \lambda) = J(x, u) + \lambda^T f(x, u) \quad ; \lambda \in R^n$
- Persamaan State :  $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f$
- Persamaan Costate :  $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$
- Kondisi Stationer :  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$

Sistem pergerakan mangsa dan pemangsa 4 *agent* antara dua kucing dan satu tikus yang dimulai dari pergerakan antara dua kucing dan dua tikus membutuhkan suatu model kontrol agar didapatkan persamaan keadaan dan *optimal control*-nya sehingga diperoleh energi minimum dengan waktu yang optimum. Masalah pergerakan mangsa untuk mendapatkan mangsanya ini memiliki kondisi awal  $x(t_0)$  dalam interval waktu  $t_f$  yang telah ditentukan. Sedangkan keadaan akhir  $x(t_f)$  yang merupakan pertemuan kucing dengan tikus masih belum diketahui, sehingga dibutuhkan *optimal control* agar dapat diselesaikan. Dalam bab ini akan dibahas bagaimana membentuk model pergerakan tersebut dan penyelesaian *optimal control* dengan menggunakan *Pontryagin Maximum Principle* dengan fungsi *Hamiltonian*.

Pergerakan mangsa dan pemangsa antara 2 tikus mengejar 1 kucing yang dimulai dari pergerakan 2 kucing mengejar 2 tikus, dimana :

- Kucing 1 mengejar tikus 1 dan kucing 2 mengejar tikus 2.
- Tikus 1 lebih dahulu tertangkap daripada tikus 2.



**Gambar 3.** Posisi Tikus dan Kucing

Pada model pergerakan ini hanya terdapat 2 agent yang dapat dikontrol yaitu pergerakan 2 kucing tersebut.

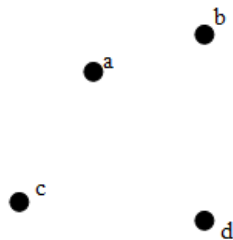
Karakteristik Kucing:

1. Tikus akan lari menjauh dari kucing terdekat.
2. Kucing lari mengejar ke arah tikus.
3. Kucing akan saling menghindari jika bertemu dengan kucing yang lain.

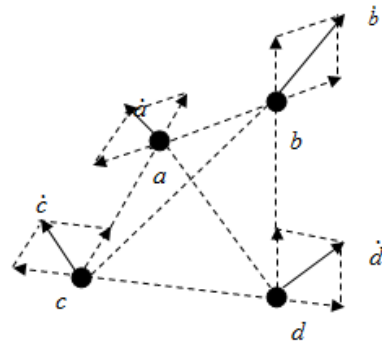
Misal : a adalah tikus 1  
 b adalah tikus 2  
 c adalah kucing 1  
 d adalah kucing 2

Dalam hal ini model sistem diasumsikan Terkontrol dan kita akan meminimumkan Fungsi Cost-nya untuk mendapatkan energi minimum dari pergerakan (sejauh t menit) tersebut.

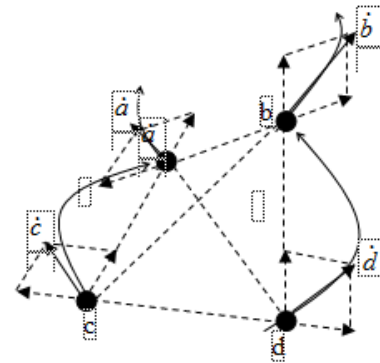
Model sistem dari pergerakan 2 kucing 2 tikus :



**Gambar 4.** Model Sistem Pergerakan 2 Kucing dan 2 Tikus



**Gambar 5.** Arah Pergerakan Tikus dan Kucing



**Gambar 6.** Pergerakan Kucing 1 Memangsa Tikus 1 dan Kucing 2 Memangsa Tikus 2

Syarat bahwa tikus tertangkap oleh kucing adalah:

$$v_{tikus} = v_{kucing} \quad \text{dimana}$$

$$\frac{d}{dt}(tikus) = \frac{d}{dt}(kucing)$$

Karena jarak tikus 1 ke kucing 1 lebih dekat daripada jarak tikus 1 ke kucing 2 dan jarak tikus 2 ke kucing 2 lebih dekat daripada jarak tikus 2 ke kucing 1, maka modelnya bisa diubah ke dalam bentuk jarak, dimana  $S = v \times t$

Sehingga:

**Tikus 1:**

$$\dot{a} = \begin{cases} \left( \frac{(a_1 - c_1) + (a_2 - c_2)}{|a_1 - c_1|^2 + |a_2 - c_2|^2} \right) & \text{jika } |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| \leq |a_1 - d_1| + |a_2 - d_2| \\ \left( \frac{(a_1 - d_1) + (a_2 - d_2)}{|a_1 - d_1|^2 + |a_2 - d_2|^2} \right) & \text{jika } |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| > |a_1 - d_1| + |a_2 - d_2| \end{cases}$$

**Tikus 2:**

$$\dot{b} = \begin{cases} \left( \frac{(b_1 - c_1) + (b_2 - c_2)}{|b_1 - c_1|^2 + |b_2 - c_2|^2} \right) & \text{jika } |b_1 - c_1| + |b_2 - c_2| \leq |b_1 - d_1| + |b_2 - d_2| \\ \left( \frac{(b_1 - d_1) + (b_2 - d_2)}{|b_1 - d_1|^2 + |b_2 - d_2|^2} \right) & \text{jika } |b_1 - c_1| + |b_2 - c_2| > |b_1 - d_1| + |b_2 - d_2| \end{cases}$$

**Kucing 1:**

$$\dot{c} = \begin{cases} \left( \frac{\{(a_1 - c_1) + (a_2 - c_2)\} + \{(c_1 - d_1) + (c_2 - d_2)\}}{\left\{ \left| (a_1 - c_1) + (a_2 - c_2) \right|^2 + \left| (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) \right|^2 \right\}} \right) & \text{jika } \left| \{(a_1 - c_1) + (a_2 - c_2)\} \right| \leq \left| \{(b_1 - d_1) + (b_2 - d_2)\} \right| \\ \left( \frac{\{(b_1 - d_1) + (b_2 - d_2)\} + \{(c_1 - d_1) + (c_2 - d_2)\}}{\left\{ \left| (b_1 - d_1) + (b_2 - d_2) \right|^2 + \left| (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) \right|^2 \right\}} \right) & \text{jika } \left| \{(a_1 - c_1) + (a_2 - c_2)\} \right| > \left| \{(b_1 - d_1) + (b_2 - d_2)\} \right| \end{cases}$$

**Kucing 2:**

$$\dot{d} = \begin{cases} \left( \frac{\{(a_1 - d_1) + (a_2 - d_2)\} + \{(c_1 - d_1) + (c_2 - d_2)\}}{\left\{ \left| (a_1 - d_1) + (a_2 - d_2) \right|^2 + \left| (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) \right|^2 \right\}} \right) & \text{jika } \left| \{(a_1 - d_1) + (a_2 - d_2)\} \right| \leq \left| \{(b_1 - d_1) + (b_2 - d_2)\} \right| \\ \left( \frac{\{(b_1 - d_1) + (b_2 - d_2)\} + \{(c_1 - d_1) + (c_2 - d_2)\}}{\left\{ \left| (b_1 - d_1) + (b_2 - d_2) \right|^2 + \left| (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) \right|^2 \right\}} \right) & \text{jika } \left| \{(a_1 - d_1) + (a_2 - d_2)\} \right| > \left| \{(b_1 - d_1) + (b_2 - d_2)\} \right| \end{cases}$$

Bentuk model diatas bukan merupakan bentuk kontrol. Karena model yang diperoleh adalah model kecepatan dari pergerakan masing-masing *agent* maka bentuk kontrol yang dibuat adalah kontrol dari kecepatan *agent* tersebut. Sehingga untuk merubah ke dalam bentuk kontrol, maka laju tikus dan kucing harus dikontrol, yaitu kontrol untuk

$$a = u_1(t)$$

$$b = u_2(t)$$

$$c = v_1(t)$$

$$d = v_2(t)$$

Sehingga diperoleh bentuk model yang baru.

Dalam sistem ini, kita hanya mengontrol pergerakan 2 kucing tersebut saja. Dengan mengadopsi bentuk Functional Cost pada model swarm yaitu 2 partikel di  $R^2$  dengan syarat tidak boleh bertubrukan[2] dengan metode *Hamiltonian* dan *Pontryagin Maximum Principle*, diperoleh *optimum trayektori*-nya dengan *functional cost*:

$$J = \frac{1}{2} \int_t^T -\delta u_1^2 - \delta u_2^2 - \frac{\gamma}{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} dt$$

Maka diperoleh *Cost Function* sebagai berikut:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} -\delta v_1^2 - \delta v_2^2 - \frac{\gamma}{|c_1 - d_1|^2 + |c_2 - d_2|^2} dt$$

Fungsi *Hamiltonian* dari system adalah:

$$H = p_1 u_1 \left( \frac{(a_1 - c_1) + (a_2 - c_2)}{|a_1 - c_1|^2 + |a_2 - c_2|^2} \right) + p_2 u_2 \left( \frac{(b_1 - d_1) + (b_2 - d_2)}{|b_1 - d_1|^2 + |b_2 - d_2|^2} \right) + p_3 v_1 \left( \frac{\{(a_1 - c_1) + (a_2 - c_2)\} + \{(c_1 - d_1) + (c_2 - d_2)\}}{\left\{ \left| (a_1 - c_1) + (a_2 - c_2) \right|^2 + \left| (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) \right|^2 \right\}} \right) + p_4 v_2 \left( \frac{\{(b_1 - d_1) + (b_2 - d_2)\} + \{(c_1 - d_1) + (c_2 - d_2)\}}{\left\{ \left| (b_1 - d_1) + (b_2 - d_2) \right|^2 + \left| (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) \right|^2 \right\}} \right) -$$

$$\frac{1}{2} p_0 \delta v_1^2 - \frac{1}{2} p_0 \delta v_2^2 - \frac{p_0 \gamma}{|c_1 - d_1|^2 + |c_2 - d_2|^2}$$

$$H = p_1 u_1 \left( \frac{(a_1 - c_1) + (a_2 - c_2)}{|a_1 - c_1|^2 + |a_2 - c_2|^2} \right) + p_2 u_2 \left( \frac{(b_1 - d_1) + (b_2 - d_2)}{|b_1 - d_1|^2 + |b_2 - d_2|^2} \right) + p_3 v_1 \left( \frac{\{(a_1 - c_1) + (a_2 - c_2)\} + \{(c_1 - d_1) + (c_2 - d_2)\}}{\left\{ \left| (a_1 - c_1) + (a_2 - c_2) \right|^2 + \left| (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) \right|^2 \right\}} \right) + p_4 v_2 \left( \frac{\{(b_1 - d_1) + (b_2 - d_2)\} + \{(c_1 - d_1) + (c_2 - d_2)\}}{\left\{ \left| (b_1 - d_1) + (b_2 - d_2) \right|^2 + \left| (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) \right|^2 \right\}} \right) -$$

$$\frac{1}{2} p_0 \delta v_1^2 - \frac{1}{2} p_0 \delta v_2^2 - \frac{p_0 \gamma}{|c_1 - d_1|^2 + |c_2 - d_2|^2}$$

#### IV. KESIMPULAN

Berikut ini kesimpulan yang diperoleh dari penelitian yang telah dilakukan :

1. Telah diperoleh model matematika dari pergerakan mangsa dan pemangsa antara dua kucing dan dua tikus.
2. Bentuk *performance index* untuk meminimumkan energi dengan waktu optimum yang dibutuhkan dari pergerakan mangsa dan pemangsa tersebut adalah *Performance index* pergerakan dua kucing dan dua tikus:

$$J_{AB} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} -\delta v_1 - \delta v_2 - \frac{\gamma}{|c_1 - d_1|^2 + |c_2 - d_2|^2} dt$$

3. Simulasi yang dibuat telah mendekati dengan model yang diperoleh.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Wahono, Romi S, 2001, "Multi Agent System: Issues, Approaches and Challenges", IECC Japan Refresing Seminar, Vol.3, No.2, pp. 22-23.
- [2] Iwan, Pranoto, dkk, July 18-21, 2006, "Simulation of Swarm Modelling Through Optimal Control System", The 6th Asian Control,
- [3] Gopal, M, 2003, Control System Principle and Design (second edition), Singapore: Mc. Grow Hill.
- [4] Naidu, Desineni Subbaram, 2003, Optimal Control System, Washington: CRC
- [5] Meyer, Walter, J, 1984, Concepts of Mathematical Modelling, New York: Mc. Graw-Hill, Inc.